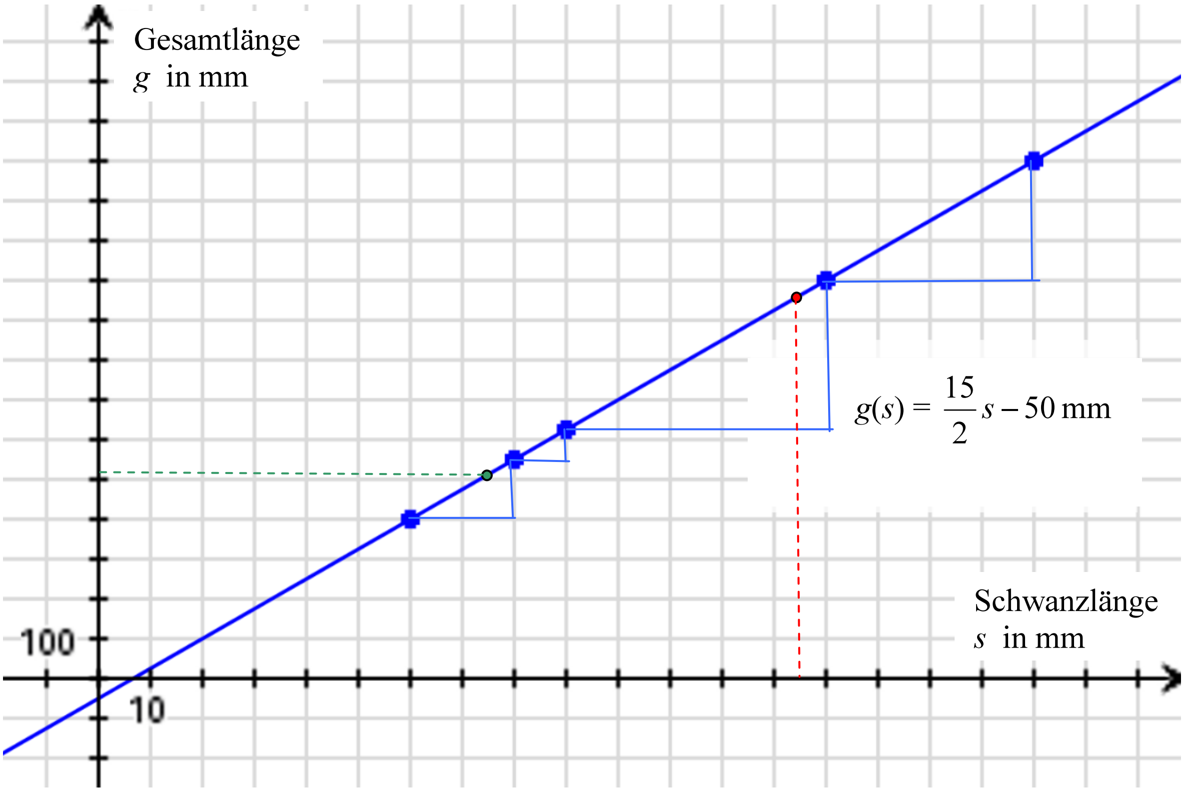
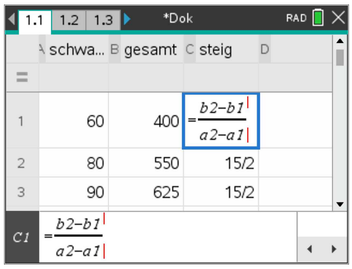
Lösungen zur Anwendungsaufgabe lfaa03 – Schlangenschwänze



a) b) g) siehe oben.

c) 1. Weg: Berechne die Steigung für jeweils benachbarte Wertepaare und zeige, dass sie immer gleich ist.

	+20	+10	+50	+40	
s in mm	60	80	90	140	180
g in mm	400	550	625	1000	1300
	+150	+75	+375	+300	
	150 : 20 = 7,5	*75 : 10 = 7,5*	*375 : 50 = 7,5*	*300 : 40 = 7,5*	



Die Schritte entsprechen den Seiten der Steigungsdreiecke.
Die Steigung ist immer gleich, nämlich 7,5 . Daher liegt eine lineare Funktion vor.
Wie du hier den CAS-Rechner geschickt einsetzen kannst, siehst du im Screenshot rechts. Verwende menu-3-3 zum Füllen in der Spalte C.

2. Weg: Berechne aus zwei Wertepaaren Steigung und Ordinatenabschnitt. Stelle die Gleichung der linearen Funktion auf und zeige, dass alle Wertepaare zu dieser Zuordnung gehören. Siehe d) e) und f)

d) Unter Verwendung der ersten beiden Wertepaare aus der Tabelle erhält man mit der allgemeinen Formel $m = \frac{\Delta g}{\Delta s} = \frac{g_2 - g_1}{s_2 - s_1} = \frac{625\text{ mm} - 400\text{ mm}}{90\text{ mm} - 60\text{ mm}} = \frac{225\text{ mm}}{30\text{ mm}} = 7{,}5$.
Die Einheiten kürzen sich heraus, daher hat die Steigung hier keine Einheit.
Sie gibt an, dass für jeden Millimeter, den der Schwanz der Schlange länger wird, die Schlange insgesamt um siebeneinhalb Millimeter länger wird.

e) Standardmethode: Da die Steigung $m = 7{,}5$ aus d) bekannt ist, setzt man ein Wertepaar, z.B. $s = 60$ mm und $g = 400$ mm in die Gleichung $g = m \cdot s + b$ ein und löst nach b auf:

$400\text{ mm} = 7{,}5 \cdot 60\text{ mm} + b \;\Leftrightarrow\; 400\text{ mm} = 450\text{ mm} + b \;\;|\; -50\text{ mm} \;\Leftrightarrow\; -50\text{ mm} = b$.
Der Ordinatenabschnitt beträgt also –50 mm. Er würde eigentlich die Länge einer Gesamtlänge einer Schlange angeben, deren Schwanz 0 mm lang ist, die also keinen Schwanz hätten. Es gibt aber keine Schlangen ohne Schwanz und eine negative Gesamtlänge ist nicht sinnvoll. Daher kann man den Ordinatenabschnitt hier keine sinnvolle Bedeutung zuweisen. Sinnvoll sind nur solche Werte, für die $g > s$ ist; das ist erst ab $s > 7\,{}^{9}/_{13}$ mm ≈ 7,7 mm der Fall. Vermutlich sind Schlangen aber doch eher noch deutlich länger.

f) $g(s) = m \cdot s + b$ $\qquad \boxed{g(s) = 7{,}5 \cdot s - 50\text{ mm}}$.

g(60 mm) = 7,5 · 60 mm – 50 mm = 450 mm – 50 mm = 400 mm
g(90 mm) = 7,5 · 90 mm – 50 mm = 675 mm – 50 mm = 625 mm
g(140 mm) = 7,5 · 140 mm – 50 mm = 1050 mm – 50 mm = 1000 mm
g(80 mm) = 7,5 · 80 mm – 50 mm = 600 mm – 50 mm = 550 mm
g(180 mm) = 7,5 · 180 mm – 50 mm = 1350 mm – 50 mm = 1300 mm

h) Nullstelle: $g(s) = 0 \;\Leftrightarrow\; 7{,}5 \cdot s - 50\text{ mm} = 0 \;\Leftrightarrow\; 7{,}5 \cdot s = 50\text{ mm} \;\Leftrightarrow\; s = 50:7{,}5\text{ mm}$

$$\Leftrightarrow s = \frac{50}{7{,}5}\text{mm} = \frac{100}{15}\text{mm} = \frac{20}{3}\text{mm} = 6\frac{2}{3}\text{mm}.$$

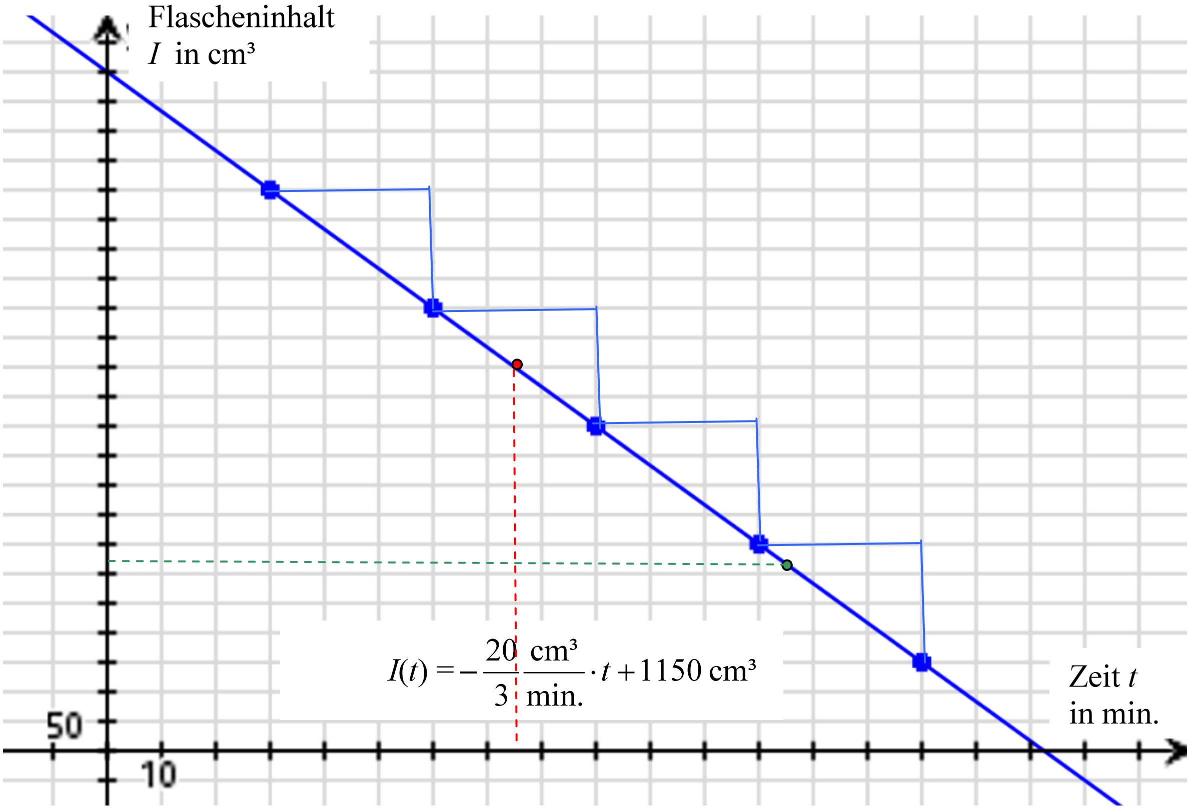
Bei einer Schwanzlänge von $6^2/_3$ mm hätte die Schlange gerade die Gesamtlänge 0 mm. Das ist natürlich nicht sinnvoll, da die Schlange mindestens so lang wie ihr Schwanz sein muss.

i) g(135 mm) = 7,5 · 135 mm – 50 mm = 1012,5 mm – 50 mm = 962,5 mm.
(Roter Punkt im Diagramm.)

j) $g(s) = 512{,}5\text{ mm} \;\Leftrightarrow\; 7{,}5 \cdot s - 50\text{ mm} = 512{,}5\text{ mm} \;\Leftrightarrow\; 7{,}5 \cdot s = 562{,}5\text{ mm}$

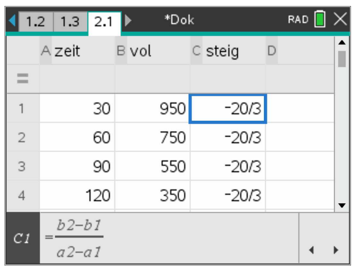
$$\Leftrightarrow s = \frac{562{,}5}{7{,}5}\text{mm} == 75\text{ mm}.$$ (Grüner Punkt im Diagramm.)

Lösungen zur Anwendungsaufgabe lfaa04 – Tropfinfusion



a) b) g) siehe oben.

c) In gleichen Zeitintervallen, nämlich jeweils 30 Minuten, nimmt der Flascheninhalt immer um den gleichen Betrag, nämlich immer um 200 cm³ ab. Daher liegt eine lineare Funktion vor.
Dies veranschaulicht das folgende Schema:



	1.2	1.3	2.1	*Dok	RAD
	A zeit	B vol	C steig	D	
=					
1	30	950	-20/3		
2	60	750	-20/3		
3	90	550	-20/3		
4	120	350	-20/3		
C1	$=\frac{b2-b1}{a2-a1}$				

+30 +30 +30 +30

t in min	30	60	90	120	150
I in cm³	950	750	550	350	150

–200 –200 –200 –200

Die Schritte entsprechen den Seiten der Steigungsdreiecke.
Die Steigung ist immer gleich, nämlich $-{}^{20}/_{3}$. Daher liegt eine lineare Funktion vor.
Wie du hier den CAS-Rechner geschickt einsetzen kannst, siehst du im Screenshot rechts. Verwende menu-3-3 zum Füllen in der Spalte C.

d) Unter Verwendung der ersten beiden Wertepaare aus der Tabelle erhält man mit der allgemeinen Formel

$$m = \frac{\Delta I}{\Delta t} = \frac{I_2 - I_1}{t_2 - t_1} = \frac{750\ \text{cm}^3 - 950\ \text{cm}^3}{60\ \text{min.} - 30\ \text{min.}} = \frac{-200\ \text{cm}^3}{30\ \text{min.}} = -\frac{20}{3}\frac{\text{cm}^3}{\text{min.}} \cong -6{,}67\frac{\text{cm}^3}{\text{min.}}.$$

Die Steigung gibt an, dass in jeder Minute $6\,{}^{2}/_{3}$ cm³ der Kochsalzlösung aus der Flasche tropfen, ist also eine Tropfgeschwindigkeit. Sie ist negativ, da der Flscheninhalt abnimmt.

e) Schnelle Methode: Nach 30 Minuten sind 950 cm³ in der Flasche, Da in 30 Minuten immer 200 cm³ herauströpfeln, sind anfangs 950 cm³ + 200 cm³ = 1150 cm³ in der Flasche.

Standardmethode: Da die Steigung m aus d) bekannt ist, setzt man ein Wertepaar, z.B. $t = 30$ min. und $I = 950$ cm³ in die Gleichung $I = m \cdot t + b$ ein und löst nach b auf:

$$950\ \text{cm}^3 = -\frac{20}{3}\frac{\text{cm}^3}{\text{min.}} \cdot 30\ \text{min.} + b \iff 950\ \text{cm}^3 = -200\ \text{cm}^3 + b \iff 1150\ \text{cm}^3 = b\ .$$

Der Ordinatenabschnitt beträgt also 1150 cm³. Er gibt an, wie viel Kochsalzlösung zu Beginn der Infusion in der Flasche sind. Man könnte ihn also auch mit I_0 bezeichnen.

f) $I(t) = m \cdot t + b$ $\qquad$ $I(t) = -\frac{20}{3}\frac{\text{cm}^3}{\text{min.}} \cdot t + 1150\ \text{cm}^3$.

$$I(30\ \text{min.}) = -\frac{20}{3}\frac{\text{cm}^3}{\text{min.}} \cdot 30\,\text{min.} + 1150\ \text{cm}^3 = -200\ \text{cm}^3 + 1150\ \text{cm}^3 = 950\ \text{cm}^3.$$
$$I(60\ \text{min.}) = -\frac{20}{3}\frac{\text{cm}^3}{\text{min.}} \cdot 60\,\text{min.} + 1150\ \text{cm}^3 = -400\ \text{cm}^3 + 1150\ \text{cm}^3 = 750\ \text{cm}^3.$$
$$I(90\ \text{min.}) = -\frac{20}{3}\frac{\text{cm}^3}{\text{min.}} \cdot 90\,\text{min.} + 1150\ \text{cm}^3 = -600\ \text{cm}^3 + 1150\ \text{cm}^3 = 550\ \text{cm}^3.$$
$$I(120\ \text{min.}) = -\frac{20}{3}\frac{\text{cm}^3}{\text{min.}} \cdot 120\,\text{min.} + 1150\ \text{cm}^3 = -800\ \text{cm}^3 + 1150\ \text{cm}^3 = 350\ \text{cm}^3.$$
$$I(150\ \text{min.}) = -\frac{20}{3}\frac{\text{cm}^3}{\text{min.}} \cdot 150\,\text{min.} + 1150\ \text{cm}^3 = -1000\ \text{cm}^3 + 1150\ \text{cm}^3 = 150\ \text{cm}^3.$$

h) Nullstelle: $I(t) = 0 \iff -\frac{20}{3}\frac{\text{cm}^3}{\text{min.}} \cdot t + 1150\ \text{cm}^3 = 0 \iff -\frac{20}{3}\frac{\text{cm}^3}{\text{min.}} \cdot t = -1150\ \text{cm}^3$

$$\iff t = \frac{-1150\ \text{cm}^3}{-\frac{20}{3}\frac{\text{cm}^3}{\text{min.}}} = \frac{1150 \cdot 3}{20}\text{min.} = 172\frac{1}{2}\text{min.}.$$

Nach 172,5 min., also 2 Stunden und 52½ Minuten ist die Infusionsflasche leer, also alle Kochsalzlösung in die Blutbahn getröpfelt.

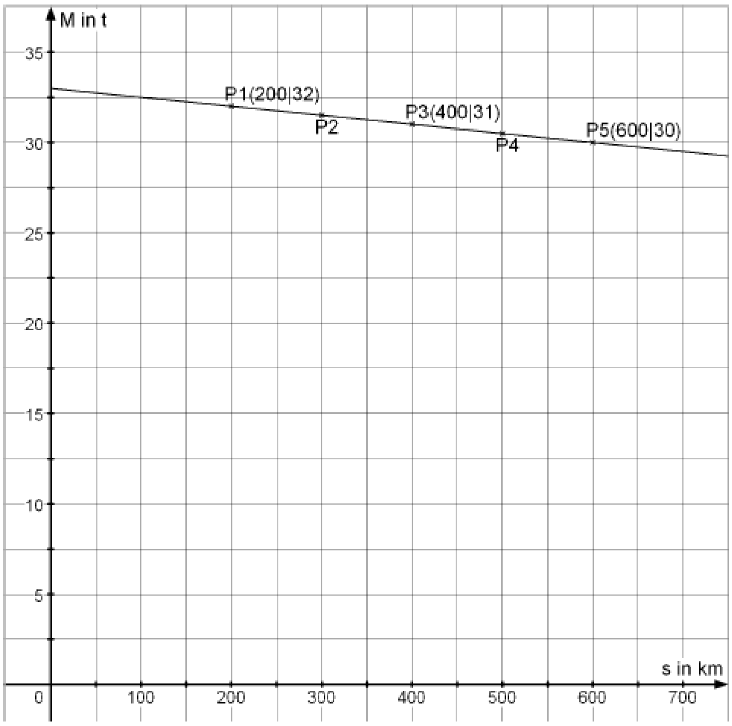
i) $I(75\ \text{min.}) = -\frac{20}{3}\frac{\text{cm}^3}{\text{min.}} \cdot 75\,\text{min.} + 1150\ \text{cm}^3 = -500\ \text{cm}^3 + 1150\ \text{cm}^3 = 650\ \text{cm}^3.$

(Roter Punkt im Diagramm.)

j) $I(t) = 320\ \text{cm}^3 \iff -\frac{20}{3}\frac{\text{cm}^3}{\text{min.}} \cdot t + 1150\ \text{cm}^3 = 320\ \text{cm}^3 \iff -\frac{20}{3}\frac{\text{cm}^3}{\text{min.}} \cdot t = -830\ \text{cm}^3$

$$\iff t = \frac{-830\ \text{cm}^3}{-\frac{20}{3}\frac{\text{cm}^3}{\text{min.}}} = \frac{830 \cdot 3}{20}\text{min.} = 124\frac{1}{2}\text{min.}.$$ (Grüner Punkt im Diagramm.)

Lösungen zur Anwendungsaufgabe lfaa05 – Flugzeugtreibstoff



a) siehe Abbildung rechts

b) siehe Abbildung rechts

c) Auf geflogenen Strecken gleicher Länge, 100km (200km), verringert sich die vorhandene Treibstoffmenge um den gleichen Betrag, nämlich um 0,5t (1,0t).

d) Bestimmung des Steigungsfaktors m mit Hilfe der Punkte (200km|32t) und (300km|31,5t):

$$m = \frac{31{,}5t - 32t}{300km - 200km}$$

$$m = \frac{-0{,}5t}{100km} = -0{,}5 \cdot \frac{t}{100km}$$

Erläuterung: Der Airbus verbraucht eine halbe Tonne Treibstoff auf 100km.

Bemerkungen: 1.) Natürlich ist auch $m = -0{,}005 \frac{t}{km}$ richtig. Aber in Analogie zur Angabe des Kraftstoffverbrauchs von Fahrzeugen ist die andere Angabe praktischer.
2.) Außerdem ist auch ein Diagramm sinnvoll, in dem man die Abszisse gröber einteilt, z.B. 1cm für 500 km, so dass man die Nullstelle erkennt. Nur dann kann man auch j) prüfen.

e) Bestimmung des Ordinatenabschnitts M_0:
Einfache Methode: Die Treibstoffmenge verringert sich pro 100km zurückgelegter Flugstrecke um 0,5t, sodass für die Treibstoffmenge nach 0km geflogener Strecke gelten muss: $M_0 = 32t + 2 \cdot 0{,}5t = 33t$.

Standardmethode: Funktionsgleichung: $M_0 = -0{,}5\frac{t}{100km} + M_0$. Einsetzen der Koordinaten eines Punktes des Graphen (z.B. (200km|32t)) in die Funktionsgleichung: $32t = -0{,}5\frac{t}{100km} \cdot 200km + M_0 \Leftrightarrow 33t = M_0$.

Erläuterung: Der Airbus ist mit 33t Treibstoff an Bord gestartet.

f) Funktionsterm: $M(s) = -0{,}5\frac{t}{100km} \cdot s + 33t$; $(M(200km) = 32t;\ M(300km) = 31{,}5t \ldots)$

g) siehe oben

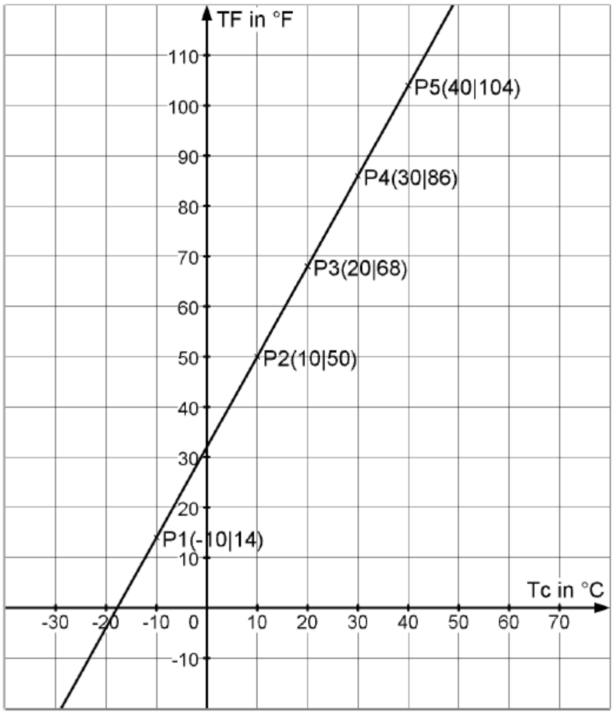
h) $M(s) = 0t \Leftrightarrow 0t = -0{,}5\frac{t}{100km} \cdot s + 33t \Leftrightarrow s = 6600km$.
Erläuterung: Nach einer Flugstrecke von 6600km wären die Tanks des Airbus leer.

i) $M(750km) = -0{,}5\frac{t}{100km} \cdot 750km + 33t = 29{,}25t$

j) $M(s) = 5{,}25t \Leftrightarrow 5{,}25t = -0{,}5\frac{t}{100km} \cdot s + 33t \Leftrightarrow s = 5550km$

Lösungen zur Anwendungsaufgabe lfaa05 – Celsius/Fahrenheit

Lösung



a) siehe Abbildung rechts

b) siehe Abbildung rechts

c) Eine Temperaturerhöhung um $10^0\,C$ entspricht immer einer Temperaturerhöhung um $18^0\,F$.

d) Siehe **c)**: $m = \frac{18^0\,F}{10^0\,C} \Leftrightarrow m = 1{,}8\frac{^0F}{^0C}$
Erläuterung: Einer Temperaturerhöhung um $1^0\,C$ entspricht eine Temperaturerhöhung um $1{,}8^0\,F$.

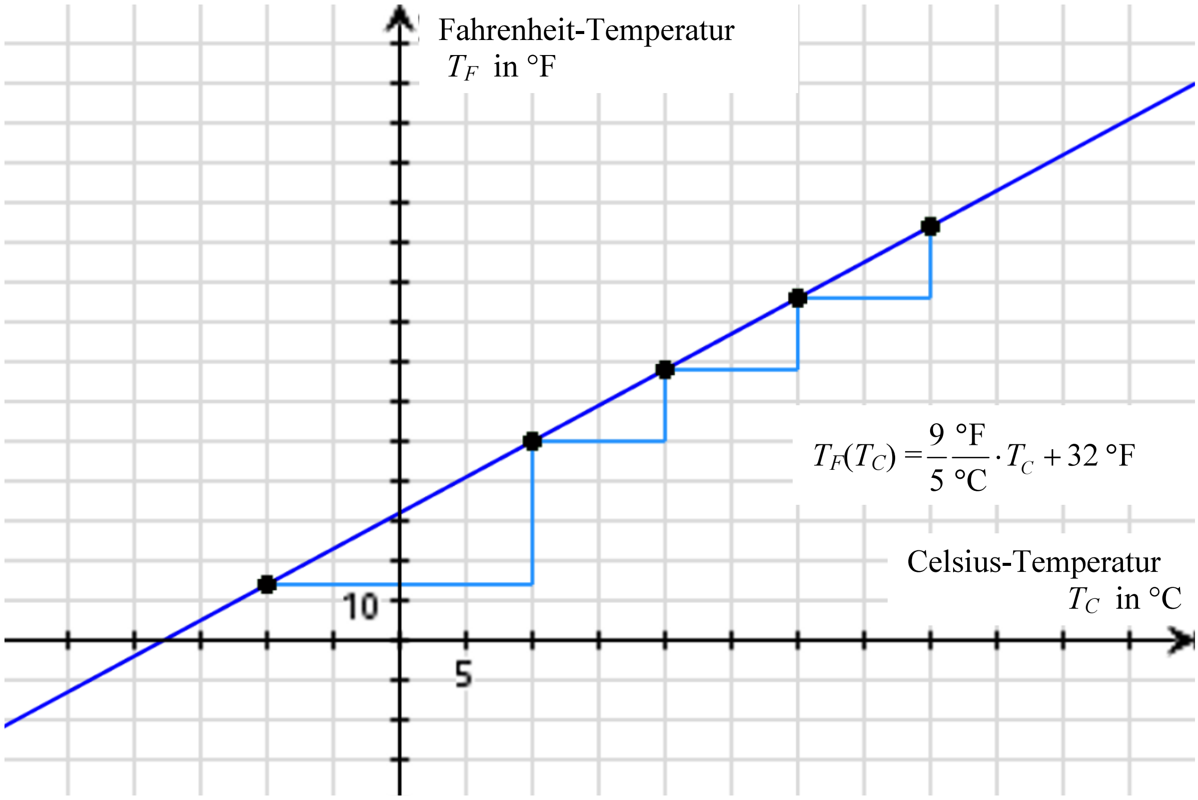
e) Funktionsgleichung: $T_F = 1{,}8\frac{^0F}{^0C}\cdot T_C + T_0$
Einsetzen der Koordinaten eines Punktes des Graphen (z.B. $(-10^0\,C\,|\,14^0\,F)$) in die Funktionsgleichung: $14^0\,F = 1{,}8\frac{^0F}{^0C}\cdot(-10^0\,C) + T_0 \Leftrightarrow T_0 = 32^0\,F$
Erläuterung: $0^0\,C = 32^0\,F$ (Gefriertemperatur des Wassers)

f) Funktionsterm: $T_F(T_C) = 1{,}8\frac{^0F}{^0C}\cdot T_C + 32^0\,F$. ($T_F(10^0\,C) = 50^0\,F$, ...)

h) $T_F(T_C) = 0^0\,F \Leftrightarrow T_C = -17\frac{7}{9}\,^0C$.

i) $T_F(100^0\,C) = 1{,}8\frac{^0F}{^0C}\cdot 100^0\,C + 32^0\,F = 212^0\,F$

j) $T_F(T_C) = 100^0\,F \Leftrightarrow T_C = 37\frac{7}{9}\,^0C$



	+20		+10	+10	+10
T_C [°C]	–10	10	20	30	40
T_F [°F]	14	50	68	86	104
	+36		+18	+18	+18

m = 36 : 20 = 1,8

m = 18 : 10 = 1,8