Lösungen zu Auftrag 1 zu Wachstumsprozessen

1.1 und 1.2 siehe Lehrbuch Seiten 42-45

1.3 LB S. 46 Nr. 4

Eine geeignete Einheit ist m².

a) Der Wachstumsfaktor für n Wochen beträgt 2^n.
   Beweis: $B(x+n) = 10\cdot 2^{x+n} = 10\cdot 2^x\cdot 2^n = 2^n \cdot (10\cdot 2^x) = 2^n \cdot B(x)$.
   Die mit Algen bedeckte Fläche vervielfacht sich also nach 4 Wochen um den Faktor $2^4 = 16$, nach 6 Wochen um den Faktor $2^6 = 64$, nach 8 Wochen um den Faktor $2^8 = 256$ bzw. nach 10 Wochen um den Faktor $2^{10} = 1024$.

b) $B(11) = 10\cdot 2^{11} = 20480$ (m²) [$B(10) = 10\cdot 2^{10} = 10240$ (m²) , $B(9) = 10\cdot 2^9 = 5120$ (m²)].

c) Nach einer Viertelwoche beträgt die Algenfläche $B\left(\frac{1}{4}\right) = 10 \cdot 2^{\frac{1}{4}} = 10 \cdot \sqrt[4]{2} \approx 11{,}89$ (m²)
   Nach einem Tag beträgt die Algenfläche $B\left(\frac{1}{7}\right) = 10 \cdot 2^{\frac{1}{7}} = 10 \cdot \sqrt[7]{2} \approx 11{,}04$ (m²)

d) Der Faktor beträgt (siehe a) $2^{10} = 1024 \approx 1000$.

1.3 S. 46 Nr. 8

8. Arten der Prozesse und Formeln:

a) exponentiell; $V(t) = 3^t$ (in cm²)
b) linear; $h(t) = 26 \cdot t$ (in cm)
c) exponentiell; $A(t) = 4^t$ (Anzahl der infizierten Personen)
d) linear: $h(t) = 3 \cdot t + 1$
e) kubisch: $V(t) = t^3$
f) quadratisch: $D(t) = 2 \cdot t^2$

Zeit (in Tagen)	0	1	2	3	4	5	6	7	8
a) Volumen (in m³)	1	3	9	27	81	243	729	2 187	6 561
b) Füllhöhe (in cm)	0	26	52	78	104	130	156	182	208
c) Anzahl Personen	1	4	16	64	256	1 024	4 096	16 384	65 536

exponentiell: Wenn man zur Abszisse die gleiche Zahl addiert, verändert sich die Ordinate immer um den gleichen Faktor.
linear: Wenn man zur Abszisse die gleiche Zahl addiert, verändert sich die Ordinate immer um den gleichen Betrag / wird zu ihr immer die gleiche Zahl addiert.
proportional: Wird die Abszisse mit einer reellen Zahl r multipliziert, wird die Ordinate immer mit derselben reellen Zahl r multipliziert.
antiproportional: Wird die Abszisse mit einer reellen Zahl r multipliziert, wird die Ordinate immer mit durch dieselbe reelle Zahl r dividiert.
quadratisch: Wird die Abszisse mit einer reellen Zahl r multipliziert, wird die Ordinate immer mit r^2 multipliziert.
kubisch: Wird die Abszisse mit einer reellen Zahl r multipliziert, wird die Ordinate immer mit r^3 multipliziert.
Potenziell: Es gibt einen festen Exponenten n, so dass immer wenn man die Abszisse mit einer reellen Zahl r multipliziert, sich die Ordinate um den Faktor r^n verändert.

2.1. und 2.2 vergleiche Lehrbuchseite 47

2.3. LB S. 48 Nr. 5

Begründen Sie die angegebene Zinseszinsformel.

Die Zunahme des Kapitals innerhalb eines Jahres lässt sich durch Multiplikation mit dem Zinsfaktor / Wachstumsfaktor $q = 1 + \frac{p}{100}$ beschreiben:

$K_1 = K_0 + Z = 1 \cdot K_0 + \frac{p}{100} \cdot K_0 = \left(1 + \frac{p}{100}\right) \cdot K_0 = q \cdot K_0$.

Auf die gleiche Art zeigt man $K_2 = q \cdot K_1$, $K_3 = q \cdot K_2$, … , $K_n = q \cdot K_{n-1}$.

Damit erhält man $K_n = q \cdot K_{n-1} = q \cdot q \cdot K_{n-2} = \underbrace{q \cdot \ldots \cdot q}_{n \text{ Faktoren}} \cdot K_0 = q^n \cdot K_0$.

Einsetzen des Zinsfaktors führt wie angegeben auf $K_n = q^n \cdot K_0 = \left(1 + \frac{p}{100}\right)^n \cdot K_0$.

5. K_0 : Anfangskapital (am Jahresbeginn)
p %: Wachstumsrate (= Zinssatz)
n: Anzahl der Jahre
K_n : Kapital nach n Jahren

K_0	1 500 €	25 000 €	23 682,28 €	1 000 €	8 945,45 €
p %	4 %	5,75 %	3 %	4,14 %	6 %
n	8	10	8	10	12
K_n	2 052,85 €	43 726,40 €	30 000 €	1 500 €	18 000 €

Sachverhalte: individuelle Lösung.

LB S. 48 Nr. 6

6. a) Regel: $B(t) = 50\,000 \cdot 1{,}025^t$ (in m³)
55 190,64 m³
[60 920,14 m³; 67 244,44 m³; 74 225,28 m³; 81 930,82 m³]

b) Regel: $V(t) = 50\,000 \cdot \left(1{,}036^t - 1{,}025^t\right) \cdot 45$ (in €)
108 340,68 € [244 392,43 €; 413 533,96 €; 622 082,52 €; 877 449,21 €]

3. Das Umkehrproblem – Der Logarithmus

a. 1000 € werden mit 4 % jährlichen Zinsen angelegt. Ermitteln Sie, wann mindestens 1500 € auf dem Konto sind.

Wertetabelle in Lists & Spreadsheets

Lösen mit der solve-Funktion im Calculator-Fenster

$\text{solve}\left(1000 \cdot (1.04)^t \geq 1500, t\right) \quad t \geq 10.338$

$\text{solve}\left(1000 \cdot \left(1 + \frac{4}{100}\right)^t \geq 1500, t\right) \quad t \geq \frac{\ln\left(\frac{3}{2}\right)}{\ln\left(\frac{26}{25}\right)}$

	A	B	C
=	=seq(i,i,0,20)	=1000*(1.04)^a[]	
1	0	1000.	
2	1	1040.	
3	2	1081.6	
4	3	1124.86	
5	4	1169.86	
6	5	1216.65	
7	6	1265.32	
8	7	1315.93	
9	8	1368.57	
10	9	1423.31	
11	10	1480.24	
12	11	1539.45	
13	12	1601.03	

c.d. LB S. 72 Aufgaben 5 und 6b)

5. a) 4; 2; 0
b) −2; −4; −3

6. a) 6; 10; 0; −3; −4; −7; $\frac{1}{2}$; 13
b) 2; 0; 5; −4; −2; 7; $\frac{1}{2}$; 1,5

LB S. 73, Aufgabe 17 a)-d)

a) $\Leftrightarrow x - 1 = 2^2 \Leftrightarrow x = 5$ 𝕃 = {5} b) $\Leftrightarrow \frac{1}{5}x = 10^{-3} \Leftrightarrow x = 5 \cdot 10^{-3}$ 𝕃 = {0,005}

c) $\Leftrightarrow 4x + 1 = 5^1 \Leftrightarrow x = 1$ 𝕃 = {1} d) $\Leftrightarrow u^2 = 2^4 \Leftrightarrow |u| = \sqrt{16}$ 𝕃 = {4; −4}