Lösungen zu Auftrag „Periodische Vorgänge Teil 5“

5.4 Lehrbuch Seite 135, Aufgabe 5

Die Tangensfunktion ist streng monoton steigend im Intervall $]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}[$. Daher hat die Gleichung $\tan(x) = a$ für alle reellen Zahlen a genau eine reelle Lösung x im Intervall $]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}[$. Deren Wert wird von der „$\tan^{-1}$“-Funktion im Taschenrechner geliefert und allgemein als $x = \arctan(a)$ bezeichnet. Alle anderen Stellen, die den gleichen Funktionswert haben, unterscheiden sich davon durch ein ganzzahliges Vielfaches der Periode π der Tangensfunktion. Daher lautet die allgemeine Lösung der Gleichung:

$$\tan(x) = a \Leftrightarrow x = \arctan(a) + k\pi\,,\ \ k \in \mathbb{Z}$$

a) $x = k\pi\,,\ k \in \mathbb{Z}$ b) $x = \frac{\pi}{4} + k\pi\,,\ k \in \mathbb{Z}$ c) $x \cong 0{,}6107 + k\pi\,,\ k \in \mathbb{Z}$

d) $x \cong -0{,}1974 + k\pi\,,\ k \in \mathbb{Z}$

6.6 Buchkopien Seite 180

Aufgabe 3d) $\Leftrightarrow \sin(x) = -\frac{8}{15} \Leftrightarrow x \cong -0{,}5625 + k\cdot 2\pi$ oder $x \cong \pi - (-0{,}5625) + k\cdot 2\pi$

$\Leftrightarrow x \cong 5{,}7296 + 2k\pi$ oder $x \cong 3{,}7041 + 2k\pi\,,\ k \in \mathbb{Z}$.

Aufgabe 3m) $\Leftrightarrow \tan(x) = -\frac{3}{4} \Leftrightarrow x \cong -0{,}6435 + k\pi\,,\ k \in \mathbb{Z}$

Aufgabe 4a) $\Leftrightarrow 3x - 2 \cong 0{,}6435 + k\cdot 2\pi$ oder $3x - 2 \cong \pi - 0{,}6435 + k\cdot 2\pi$ | +2 ; :3

$\Leftrightarrow x \cong 0{,}8812 + \frac{2}{3}k\pi$ oder $x \cong 1{,}4994 + \frac{2}{3}k\pi\,,\ k \in \mathbb{Z}$.

Beachten Sie die andere Periode auch bei den Lösungen!!

Aufgabe 4b) $\Leftrightarrow 5x + 7 \cong 0{,}6435 + k\cdot 2\pi$ oder $5x + 7 \cong 2\pi - 0{,}6435 + k\cdot 2\pi$ | –7 ; :5

$\Leftrightarrow x \cong -1{,}2713 + \frac{2}{5}k\pi$ oder $x \cong -0{,}2721 + \frac{2}{5}k\pi\,,\ k \in \mathbb{Z}$.

$\Leftrightarrow x \cong -0{,}0147 + \frac{2}{5}n\pi$ oder $x \cong 0{,}9846 + \frac{2}{5}n\pi\,,\ n \in \mathbb{Z}$

($n = k - 1$, Verschiebung beider Lösungen um eine Periode, um die Lösungen mit dem kleinsten Betrag zu erhalten)

Aufgabe 5

c) $\sin(x) = 2\cos(x)$

$\Leftrightarrow \tan(x) = 2$

$\Leftrightarrow x = \arctan(2) + k\pi$

$\approx 1{,}1071 + k\pi\,,\ k \in \mathbb{Z}$

e) $\cos(2x+1) = 3\sin(2x+1)$

$\Leftrightarrow \tan(2x+1) = \frac{1}{3}$

$\Leftrightarrow 2x+1 = \arctan(\frac{1}{3}) + k\pi$

$\Leftrightarrow x = \frac{\arctan(\frac{1}{3}) - 1}{2} + k\cdot\frac{\pi}{2}$

$\approx -0{,}3391 + k\cdot\frac{\pi}{2}\,,\ k \in \mathbb{Z}$

oder $1{,}2317$

Aufgabe 7b)

Beispiel 7b) $2\cos^2(x) + 3\cos(x) + 1 = 0$

$y = \cos(x)$ substituieren

$2y^2 + 3 \cdot y + 1 = 0$

[NR a;b-c Formel $\Delta = 9 - 4 \cdot 2 = 1 > 0$

$y_{1/2} = \frac{-3 \pm 1}{2 \cdot 2}$]

$\Longrightarrow y = -1 \quad \vee \quad y = -\frac{1}{2}$

Resub

$\Longrightarrow \cos(x) = -1 \quad \vee \quad \cos(x) = -\frac{1}{2}$

$\Longrightarrow x = \pi + k\pi \quad \vee \quad x = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi \quad \vee \quad x = \frac{4\pi}{3} + 2k\pi \quad , \ k \in \mathbb{Z}$

NR $y = -1 \vee y = -\frac{1}{2}$

$\Longleftrightarrow y^2 + \frac{3}{2}y + \frac{1}{2} = 0$

$\Longleftrightarrow 2y^2 + 3y + 1 = 0$

Aufgabe 7d) Die Gleichung ist äquivalent zu
$\sin^2(x) - \frac{\sqrt{3}}{4}\sin(x) + \frac{3}{8} = 0$. Die Substitution $z = \sin(x)$ führt auf die quadratische Gleichung $z^2 - \frac{\sqrt{3}}{4}z + \frac{3}{8} = 0$ mit der Diskriminante $D = (\frac{\sqrt{3}}{4})^2 - \frac{3}{8} = -\frac{3}{16} < 0$. Da diese Gleichung unerfüllbar ist, hat auch die Ausgangsgleichung keine Lösung.

6.7 Buchkopien Seite 180, Aufgaben 8 a) und c)*

Seite 180, (Aufgabe 8)

a) $\sin(x) + 4\cos(x) = 1$

$\Leftrightarrow \sin(x) = -4\cos(x) + 1$

$\Rightarrow \sin^2(x) = 16\cos^2(x) - 8\cos(x) + 1$

$\Leftrightarrow 17\cos^2(x) - 8\cos(x) = 0$

$\Leftrightarrow \cos(x) = 0 \vee \cos(x) = \frac{8}{17}$

1. Fall $\cos(x) = 0 \Rightarrow \sin(x) = 1$ $\quad x = \frac{\pi}{2} + k\cdot 2\pi$ 1. Lösung

2. Fall $\cos(x) = \frac{8}{17} \Rightarrow \sin(x) + \frac{32}{17} = 1 \Rightarrow \sin(x) = -\frac{15}{17}$

$x = 2\pi - \arccos\left(\frac{8}{17}\right)$

$\approx 5{,}2035 + k\cdot 2\pi$

c) $3\sin(x) = 4\cos(x) + 5$

$\Rightarrow 9\sin^2(x) = 16\cos^2(x) + 40\cos(x) + 25$

$\Leftrightarrow 25\cos^2(x) + 40\cos(x) + 16 = 0$

$\Leftrightarrow (5\cos(x) + 4)^2 = 0$

$\Leftrightarrow \cos(x) = -\frac{4}{5}$, eingesetzt oben $\Rightarrow 3\sin(x) = -\frac{16}{5} + 5$

$\Rightarrow \sin(x) = \frac{3}{5}$

$x = \arccos\left(-\frac{4}{5}\right) + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$

$\approx 2{,}4981$