Mittelpunktswinkel und Umfangswinkel

Lösungen

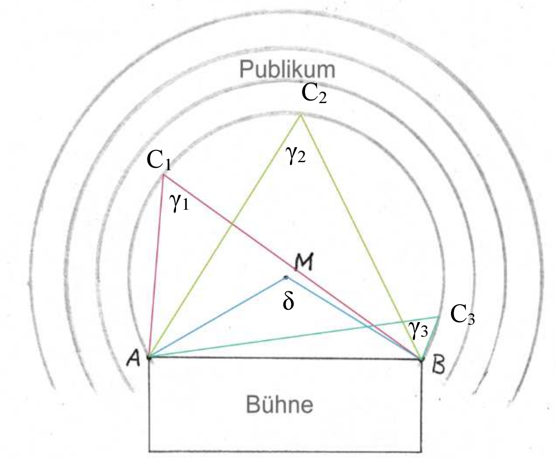
Im Amphitheater von Delphi saßen die Zuschauer auf einer kreisförmig angelegten Tribüne.

Aufgabe 1.) Von welchem Platz der ersten Reihe aus hatte man den größten Blickwinkel auf die Bühne? Zeichne in der untenstehenden Zeichnung die Blickwinkel von verschiedenen Punkten C_1, C_2, C_3, ... des inneren Kreises ein und miss die Winkel nach, um deine Vermutung zu überprüfen.

Die Blickwinkel sind alle gleich groß (etwa $\gamma_1 = \gamma_2 = \gamma_3 = 60°$)

Aufgabe 2.) Wie groß ist der Blickwinkel vom Mittelpunkt M aus? Vergleiche mit den in 1.) gemessenen Werten!

Die Blickwinkel vom Mittelpunkt aus ist doppelt so groß (etwa $\delta = 120°$) wie der aus der ersten Reihe.



Aufgabe 3.) Wie groß sind Mittelpunktswinkel und die Umfangswinkel über einem Halbkreisbogen? (Wenn du gut darüber nachdenkst, entdeckst du, dass du das vor kurzem unter einem anderen Namen gelernt hast!)

Der Mittelpunktswinkel über einem Halbkreisbogen ist 180° groß. Jeder Umfangswinkel über einem Halbkreisbogen ist 90° groß. Dass jeder Umfangswinkel hier die gleiche Größe hat und genau ein rechter Winkel ist, ist genau die Aussage des Satz des Thales.

Aufgabe 4.) Zeichne einen Kreisbogen mit einem überstumpfen Mittelpunktswinkel und miss wieder verschiedene Umfangswinkel. Was vermutest du?

Auch hier haben alle Umfangswinkel die gleiche Größe und auch hier ist der Mittelpunktswinkel doppelt so groß. Man muss aber darauf achten, dass der Punkt C nicht auf dem Kreisbogen von A nach B gegen den Uhrzeigersinn liegt (dass er also auf dem kleineren Ausschnitt des Kreisrandes liegt)!

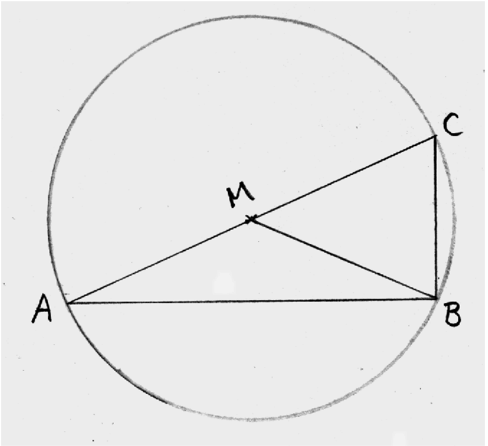
Aufgabe 5.) Zeichne mit dem Geometry-Tool deines CAS-Rechners einen Kreis mit Mittelpunkt M und drei Punkten A, B und C auf dem Kreisrand. Miss Mittelpunkts- und Umfangswinkel. Verschiebe die Punkte und verändere den Kreis und beobachte!

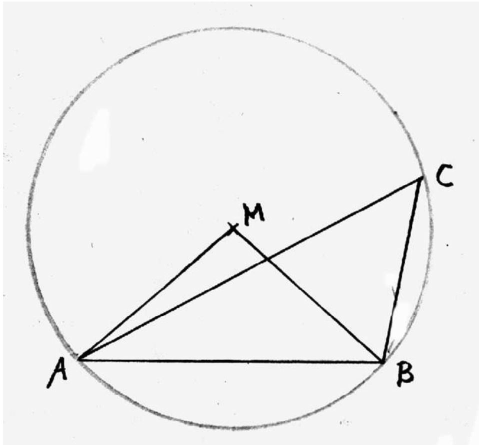
Alle Umfangswinkel über demselben Bogen haben immer die gleiche Größe und der Mittelpunktswinkel über diesem Bogen ist auch immer doppelt so groß wie die Umfangswinkel.

Aufgabe 6.) Studiere den Beweis der beiden Sätze aus den beigefügten Lehrbuchkopien (Lambacher/Schweizer 8). Übertrage Fall 1 in dein Hausheft und vollziehe die Schritte nach,

Das ist der Fall, dass das Dreieck ABC spitzwinklig ist. Denn M liegt innerhalb dieses Dreiecks.

Aufgabe 7.) Die Abbildungen zeigen die beiden anderen Möglichkeiten für die Lage des Scheitelpunktes C des Umfangswinkels.
a) Von welchem Typ ist das Dreieck ΔABC *jeweils? Von welchem Typ war es in dem Fall 1 aus der vorigen Aufgabe? Vergleiche mit der Lage des Kreismittelpunktes.*
b) Führe jeweils den Beweis für den Satz vom Mittelpunktswinkel in diesen Fällen.





Fall 2: M liegt auf einem Schenkel des Umfangswinkels, das Dreieck ΔABC ist rechtwinklig .

Fall 3: M liegt außerhalb des Umfangswinkels, das Dreieck ΔABC ist stumpfwinklig .

(Zur Erinnerung die Beweisschritte: 1. Strecke MC als Hilfslinie einzeichnen, 2. Winkel benennen, 3. Gleichschenklige Dreiecke suchen, Basiswinkelsatz anwenden, 4. Winkelsumme in Dreiecken / Außenwinkelsatz 5. Mittelpunktswinkel aus Umfangswinkel berechnen)

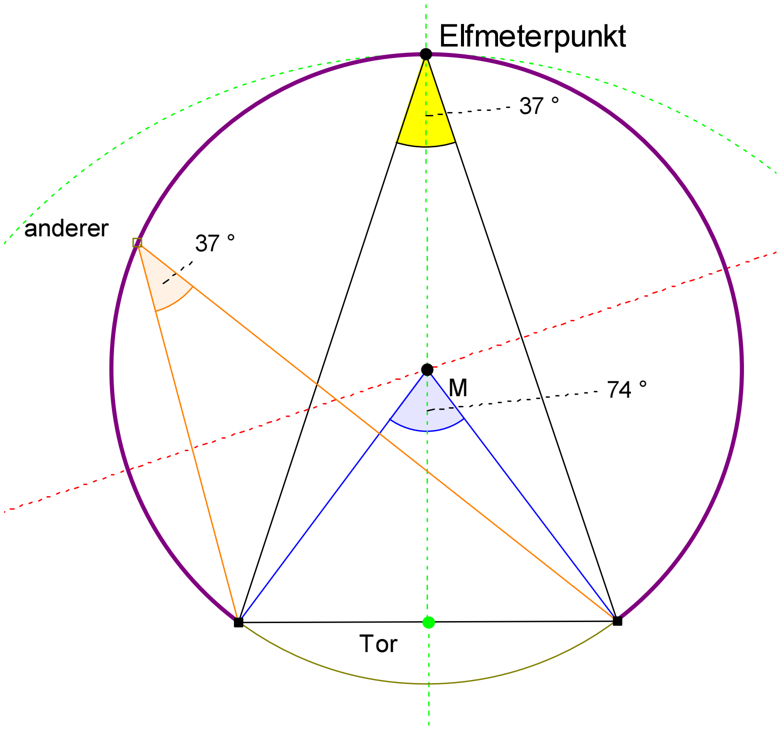
Aufgabe 8.) Übertrage die Definitionen und die Sätze vom Mittelpunkts- und Umfangswinkel in dein Regelheft.

Aufgabe 9) Ein Fußballtor ist 7,32 Meter breit, der Strafstoßpunkt befindet sich genau 11 Meter davon entfernt mitten vor dem Tor.

a) Fertige eine Skizze im Maßstab 1:100 an und miss den Schusswinkel beim Elfmeter!

b) Zeichne alle Punkte ein, von denen aus man den gleichen Schusswinkel hat!

c) Von welchem Punkt aus hat man einen doppelt so großen Schusswinkel?



Zeichne zuerst eine 7,32 cm lange Strecke für das Tor. Konstruiere dann die Mittelsenkrechte dieser Strecke. Markiere in 11 cm vom Mittelpunkt des Tores auf der Mittelsenkrechten den Elfmeterpunkt.

a) Der Schusswinkel beträgt etwa 37° (genauer: 36,8°).

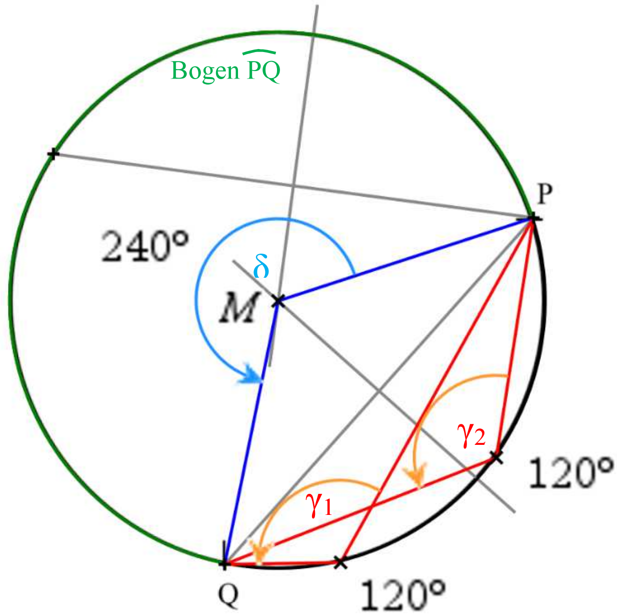
b) Konstruiere die Mittelsenkrechte der Strecke von einem Torpfosten zum Elfmeterpunkt. Der Schnittpunkt der beiden Mittelsenkrechten ist der Mittelpunkt des Umkreises (Kreises durch die beiden Torpfosten und den Elfmeterpunkt).

Dem Umfangswinkelsatz zufolge man von allen anderen Punkten auf dem Kreisbogen dieses Kreises, der „oberhalb“ des Tores liegt, den gleichen Schusswinkel wie vom Elfmeterpunkt. Also zeichnet man diesen Kreisbogen auf dem Umkreis ein (im Bild dick violett).

(Alle anderen Punkte innerhalb oder außerhalb lägen auf einem Kreisbogen mit einem größeren bzw. kleineren Mittelpunktswinkel, so dass auch der Umfangswinkel größer bzw. kleiner wird.)

c) Nach dem Mittelpunktswinkelsatz hat man von M aus den doppelt so großen Schusswinkel.

Aufgabe 10: (Verständniskontrolle)



a) Konstruiere den Mittelpunkt des Kreises.

Zeichne zwei Sehnen ein, konstruiere ihre Mittelsenkrechten und markiere deren Schnittpunkt M.

b) Zeichne den Bogen $\overset{\frown}{PQ}$ ein. grün

c) Zeichne den Mittelpunktswinkel δ über $\overset{\frown}{PQ}$ ein. blau

d) Zeichne zwei Umfangswinkel γ_1 und γ_2 über $\overset{\frown}{PQ}$ ein. rot

e) Miss die Winkel und erläutere an diesem Beispiel den Mittelpunktswinkel- und den Umfangswinkelsatz.

Der Mittelpunktswinkel ist 240° groß. Die beiden Umfangswinkel sind jeweils 120° groß.
Damit ist der Mittelpunktswinkel über dem Bogen doppelt so groß wie jeder Umfangswinkel über demselben Bogen, denn 240° = 2·120°. Das ist die Aussage des Mittelpunktwinkelsatzes.
Außerdem sind beide Umfangswinkel gleich groß. Das ist kein Zufall, denn der Umfangswinkelsatz besagt, dass alle Umfangswinkel über demselben Bogen die gleiche Größe haben.

f) Wie heißt der Spezialfall, wenn der Mittelpunktswinkel ein gestreckter Winkel ist?

Dieser Spezialfall ist der Satz des Thales.

δ