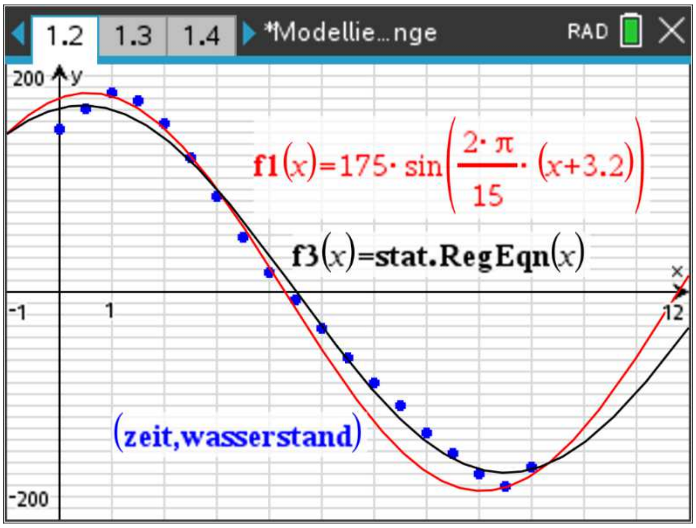
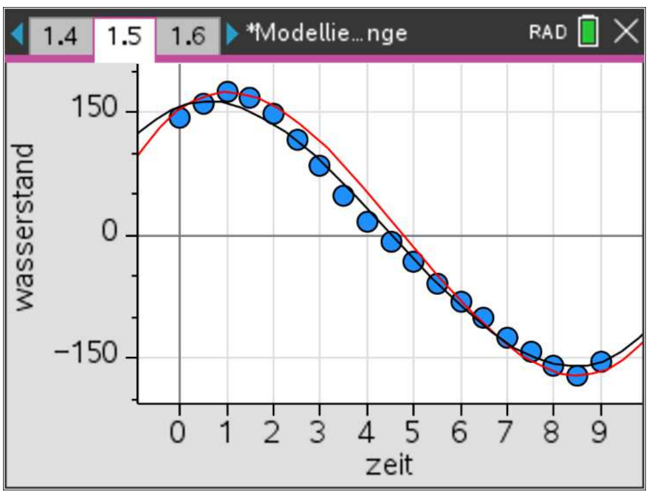
Lösungen zum Arbeitsauftrag 3 zu Periodischen Vorgängen

1. b. Der Graph passt qualitativ gut zu den Werten, da Maximal- und Minimalwerte sowie der zeitliche Abstand zwischen deren Eintreten gut wiedergegeben werden. Allerdings liegen viele Punkte deutlich neben dem Graphen (insbesondere im Intervall [6;8].
Die durch Sinus-Regression gefundene Funktion hat hingegen nicht ganz genau die richtige Periodendauer (6,12 Stunden statt 15 Stunden) und die Amplitude ist zu klein, dafür verläuft sie besser durch die Punkte zwischen dem maximalen und minimalen Wasserstand,



c. Bei den Gezeiten handelt es sich um näherungsweise einen periodischen Vorgang, da sich Ebbe und Flut in einem Rhythmus von etwa zwölfeinhalb Stunden wiederholen. Die Sinusfunktion ist als periodische Funktion daher oft gut geeignet, periodische Vorgänge zu modellieren.
Die graphische Darstellung der Messwertepaare zeigt zudem eine Ähnlichkeit mit (etwas mehr als) einer halben Periode der Sinusfunktion: Es gibt einen Hochpunkt und einen Tiefpunkt und eine Wendestelle in der Mitte zwischen diesen, die Symmetriezentrum des Graphen ist.
Da der durchschnittliche Wasserstand bei 0 cm liegt und maximaler Wasserstand (175 cm) und minimaler Wasserstand (–171 cm) in etwa den gleichen Betrag haben (, kann auf eine Ordinatenverschiebung verzichtet werden (d=0).
Durch den Parameter a, die Amplitude, kann diese Höhe an die gegebenen Extremwerte angepasst werden (a =175). Damit stimmt dann auch der Wertebereich mit den Vorgaben überein.
Der Parameter b ermöglicht eine Anpassung der Periodendauer (b=$\frac{2\pi}{15}$).
Mithilfe des Parameters c, die Abszissenverschiebung, kann schließlich der genaue Zeitpunkt des maximalen Wasserstandes angepasst werden (c=7,5 – 4,3 = 3,2).
d. Der Verlauf der Messwertepaare im Zeit-Wasserstands-Diagramm ähnelt dem einer ganzrationalen Funktion 3. Grades. Durch Vorgabe der Extrempunkte H(1 | 175) und T(8,5 |–171) erhält man dann z.B. „automatisch“ den Wendepunkt W(4,75 | 2) in der Mitte, der Symmetriezentrum des Graphen ist und gut mit dem gegebenen Wert (4,5|–7) übereinstimmt.
Für den Ansatz $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ hat man dann 4 Bedingungsgleichungen $f(1) = 175$, $f'(1) = 0$, $f(8{,}5) = -171$ und $f'(8{,}5) = 0$, die genau die Bestimmung der vier Parameter ermöglichen.
Allerdings kann diese Beschreibung nur in dem genannten Zeitintervall geeignet sein, da ganzrationale Funktionen nicht periodisch sind und im globalen Verlauf beliebig große und beliebig kleine Funktionswerte annehmen,

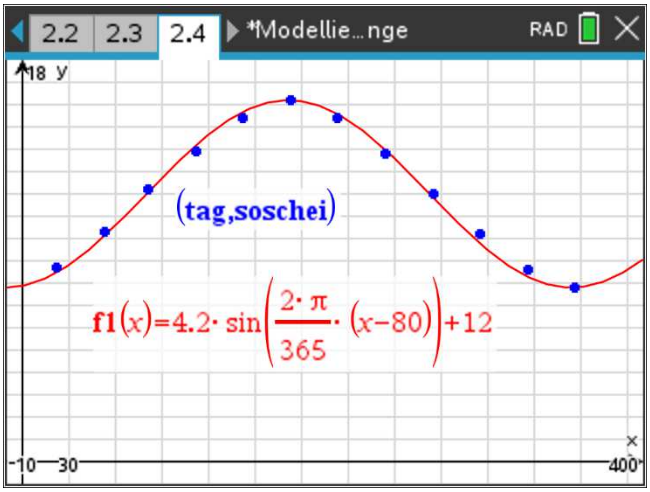


Durchführen der Rechnung ist nicht verlangt. Wenn man es aber tut, sieht man, dass die Beschreibung damit sehr gut gelingt (siehe Bild, roter Graph).
Auch eine kubische Regression ist möglich (siehe schwarzer Graph).
*Für die Lösungsfunktionen siehe Auftrag 3. *** ganz am Ende.*

(schwarzer Graph)

S. 133 Nr. 2 t : Tag des Jahres (oder Zeit in Tagen ab dem 31. Dezember)
$s(t)$: Astronomische Sonnenscheindauer in Stunden am t. Tag des Jahres

Erster Weg: Der Ansatz: $s(t) = a \cdot \sin(\omega(t-c)) + d$ ist sinnvoll, da es ein periodischer Vorgang ist und die Werte im Diagramm auf einer Kurve liegen, die einer Sinuskurve ähnlich ist.
Da sich die Sonnenscheindauer jährlich wiederholt, ist es sinnvoll T = 365 anzunehmen. Damit

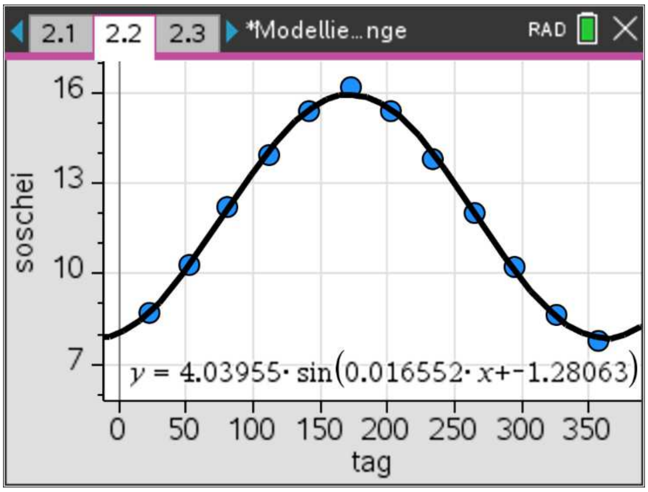


wird $\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{365}$. Die maximale Sonnenscheindauer beträgt 16,2 Stunden am 22. Juni, die minimale 7,8 Stunden am 22. Dezember (s_{max} = 16,2 , s_{min} = 7,8). Daher setzen wir die Amplitude $a = \frac{16{,}2-7{,}8}{2} = 4{,}2$ und die Ordinatenverschiebung (Mittelwert) $d = \frac{16{,}2+7{,}8}{2} = 12$.
Der 21. März ist der Tag, an dem der Mittelwert angenommen wird und die astronomische Sonnenscheindauer steigt, also s(80) = 12, wähle daher c = 80.
(Oder: Am 22. September ist s(265) = 12. Eine halbe Periode vorher: c = 265 – 365 : 2 – 265 = 82,5 .)

$$s(t) = 4{,}2 \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{365}(t-80)\right) + 12$$

	A tag	B soschei
=		
1	22	8.7
2	53	10.3
3	81	12.2
4	112	13.9
5	142	15.4
6	173	16.2
7	203	15.4
8	234	13.8
9	265	12
10	295	10.2
11	326	8.6
12	356	7.8

Zweiter Weg: Übertragen der Werte in eine Tabelle im CAS-Rechner und Darstellen in einem Diagramm. Der Ansatz: $s(t) = a \cdot \sin(\omega(t-c)) + d$ ist sinnvoll, da es ein periodischer Vorgang ist und die Werte im Diagramm auf einer Kurve liegen, die einer Sinuskurve ähnlich ist.



Bestimmen der Sinus-Regression führt auf

$$s(t) = 4{,}040 \cdot \sin(0{,}01655t - 1{,}281) + 11{,}89$$

Im Diagramm bestätigt sich, dass der Verlauf sehr gut durch diese Funktion beschrieben wird.

S. 134 Nr. 6 **Geben** Sie die Funktionsgleichungen an!
m : zeit in Monaten während eines Jahres $\vartheta(m)$ mittlere Tagestemperatur in °C

Athen: $\vartheta(m) = 9 \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{12}(m-5)\right) + 19$

Moskau: $\vartheta(m) = 14 \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{12}(m-5)\right) + 4$

Jakutsk : $\vartheta(m) = 34 \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{12}(m-4)\right) + 12$

S. 134 Nr. 8

t : Zeit in Sekunden

y(*t*) : Auslenkung aus der Nulllage nach oben in Zentimetern

Dem Text kann man entnehmen, dass die Periodendauer *T* =2 Sekunden beträgt. Daraus berechnet man die Kreisfrequenz $\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{2} = \pi$.

Die Amplitude entspricht der Auslenkung aus der Nulllage, Somit ist *a* = 4 Zentimeter.

Da die Nulllage die Gleichgewichtslage ist und das Federpendel um sie herum schwingt, ist *d* = 0.

Nach einer Viertel Periode durchläuft das Pendel erstmals die Nulllage von oben nach unten. Dort liegt bei *y*(*t*) ein Vorzeichenwechsel von + nach – vor. Nach drei Vierteln einer Periode durchläuft das Pendel die Nulllage von unten nach oben; also ist dann ein Vorzeichenwechsel bei *y*(*t*) von – nach +. Somit ist *c* = ¾ T = 1,5 Sekunden oder ϕ = ¾ · 2π = 3 π /2 .

Insgesamt ergibt sich

$$\begin{aligned} y(t) &= 4 \cdot \sin\big(\pi(t-1{,}5)\big) = 4 \cdot \sin\left(\pi t - \frac{3}{2}\pi\right) \\ &= 4 \cdot \sin\left(\pi t - \frac{3}{2}\pi + 2\pi\right) = 4 \cdot \sin\left(\pi t + \frac{\pi}{2}\right) \\ &= 4 \cdot \cos(\pi t) \end{aligned}$$

Auftrag 3. ***

(Mit anderen Ansätzen erhält man leicht unterschiedliche Lösungen. Kontrollieren Sie am besten selbst durch Zeichung mit dem CAS.)

Ansatz $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$

Ansatz mit Extrempunkten H(1 | 175) und T(8,5 |–171) und Wendepunkt W(4,75 | 2)

$f(1) = 175,$

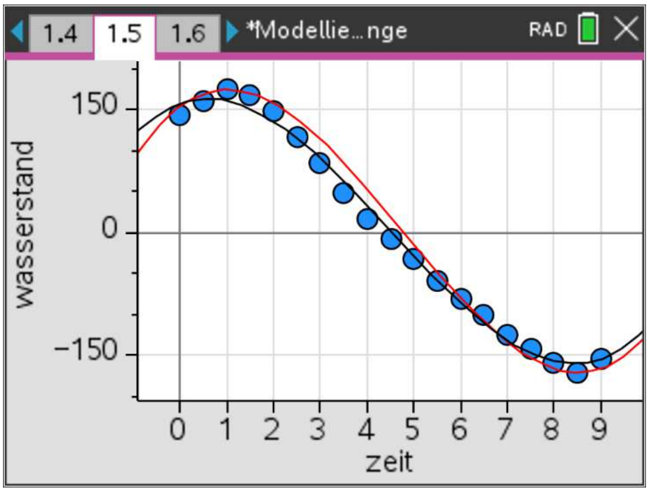
$f'(1) = 0$,

$f(8{,}5) = -171$

$f'(8{,}5) = 0$

[$f(4{,}75) = 2$

$f''(4{,}75) = 0$]



Führt auf

$y = 1{,}640x^3 – 23{,}73x^2 + 41{,}83x + 154{,}9$

(roter Graph)

Kubische Regression führt auf

$y = 1{,}352x^3 – 18{,}26x^2 + 20{,}05x + 158{,}0$

(schwarzer Graph)