Allgemeine Sinusfunktionen

Ziel: Beherrschung allgemeiner Funktionen der Form $x \mapsto a\sin(\omega x - \varphi) + d$ und
$x \mapsto a\sin(\omega(x - c)) + d$

Den **Parameter *d*** in diesen Funktionsgleichungen könnte man z.B. „*y*–Verschiebung“ oder besser „Ordinatenverschiebung“ nennen, da er angibt, wie weit die gewöhnliche Sinuskurve „nach oben“, d.h. in Richtung der positiven Ordinaten-Achse verschoben wird.
Der Parameter *d* kann wie folgt aus dem Graphen abgelesen werden:
- Die Sinuskurve schwingt um die „Mittellinie“ $y = d$.
- Man nimmt den Mittelwert der größten und der kleinsten Funktionswerte (also der Ordinaten der Hoch- bzw. Tiefpunkte des Graphen).

Der **Parameter *c*** gibt dementsprechend an, wie weit die Sinuskurve in Richtung der positiven *x*-Achse („nach rechts“) verschoben wird. Man könnte ihn daher „Abszissenverschiebung“ nennen. Das Minuszeichen in der Funktionsgleichung bewirkt, dass positive Werte von *c* Verschiebungen in positive Richtung zur Folge haben.
Ist *c* in der Funktionsgleichung $x \mapsto a\sin(x - c) + d$ (bzw. allgemein die Phasenverschiebung φ) ein ganzzahliges Vielfaches von 2π – also eine der Zahlen ...–6π, –4π, –2π, 0, 2π, 4π, 6π ... – so ändert sich der Funktionsgraph nicht.
Zwei Werte von *c* (bzw. ebenso zwei Phasenverschiebungen) bewirken demzufolge die gleiche Verschiebung, wenn ihre Differenz ein ganzzahliges Vielfaches von 2π (allgemein: der Periode T) ist.

Die ***Kreisfrequenz ω*** bewirkt eine Streckung bzw. Stauchung des Graphen in „horizontaler“ Richtung, also parallel zur Abszisse. Er gibt ferner an, wie viele Schwingungen in einem Intervall der Breite 2π (einer Periode der gewöhnlichen Sinusfunktion) stattfinden.
Im Falle $\omega > 1$ wird der Graph „enger“, also um den Faktor $1/\omega$ gestaucht.
Für $0 < \omega < 1$ wird der Graph „weiter“, also um den Faktor $1/\omega$ gestreckt.
Für negative Werte von ω geschieht zusätzlich eine Spieglung an der Ordinatenachse.
Um den Wert von ω aus dem Verlauf des Graphen zu bestimmen, kann man die Zahl der vollen Schwingungen in einem 2π breiten Intervall ablesen. Ist dies keine ganze (oder halbe ganze Zahl), so ist es einfacher, die Periode T abzulesen und dann $\omega = \frac{2\pi}{T}$ zu berechnen. Die Periode liest man als Differenz der Abszissen zweier benachbarter Hochpunkte ab. Liegen diese sehr eng zusammen, ist es geschickter, mehrere Perioden abzulesen und dann durch die Anzahl der Perioden zu teilen.
Innerhalb einer Einheit auf der Abszisse finden $f = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi}$ Schwingungen statt.

Die ***Amplitude a*** bestimmt man aus dem Graphen ab, indem man
- die Differenz zwischen Ordinaten der Hochpunkte und der Ordinatenverschiebung („Mittellinie“) abliest oder
- (geschickter) die höchsten und niedrigsten Funktionswerte an den Hoch- bzw. Tiefpunkten abliest und dann die Hälfte aus deren Differenz nimmt:

$$a = \frac{\text{größter Funktionswert} - \text{kleinster Funktionswert}}{2}$$

Die ***Phasenverschiebung*** φ: Es gilt folgende Formel: $\varphi = \omega \cdot c \Leftrightarrow c = \frac{\varphi}{\omega}$.

Die Abszissenverschiebung lässt sich nur aus der Klammerversion $x \mapsto a \cdot \sin(\omega \cdot (x - c)) + d$ ablesen. Man erhält sie aus der anderen Fassung $x \mapsto a \cdot \sin(\omega \cdot x - \varphi) + d$, indem man den Faktor ω ausklammert.

Allgemein:

Der Graph von $x \mapsto a \cdot \sin(\omega \cdot x - \varphi) + d$ entsteht aus dem Graphen der gewöhnlichen Sinusfunktion $x \mapsto \sin(x)$, indem er

1. zunächst um den Faktor $1/\omega$ in x-Richtung gestreckt bzw. gestaucht wird,
2. dann um den Faktor $|a|$ in y-Richtung gestreckt bzw. gestaucht wird,
3. anschließend, falls a negativ ist, an der x-Achse gespiegelt wird bzw.,
4. falls ω negativ ist, an der y-Achse gespiegelt wird,
5. daraufhin um d in Richtung der positiven y-Achse verschoben und
6. schließlich um $c = \varphi / \omega$ in Richtung der positiven x-Achse verschoben wird.

Umgekehrt kann man die Parameter wie folgt aus dem Graphen bestimmen:

- d ist der Mittelwert des größten und kleinsten Funktionswertes.
- $(c \mid d)$ sind die Koordinaten des Symmetriezentrums.
- $a = \frac{\text{größter Funktionswert} - \text{kleinster Funktionswert}}{2}$
- φ erkennt man daran, welcher Bruchteil einer vollen Periode der Graph in Richtung der positiven Abszisse verschoben ist. Ist er also z.B. um eine Viertel Periode „nach links“ verschoben, so ist $\varphi = -\frac{1}{4} \cdot 2\pi = -\frac{\pi}{2}$.
- ω kann man als die Zahl der vollen Schwingungen in einem Intervall der Breite 2π ablesen. Ist dies keine ganze (oder halbe ganze Zahl), so ist es einfacher, die Periode T abzulesen und dann $\omega = \frac{2\pi}{T}$ zu berechnen.

Natürlich lassen sich φ und c auch auseinander berechnen.