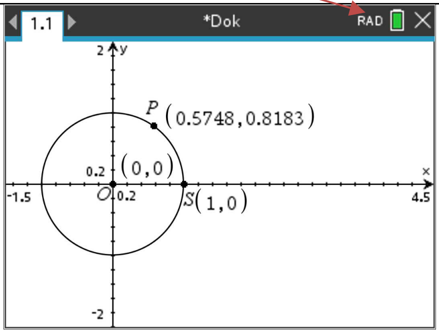
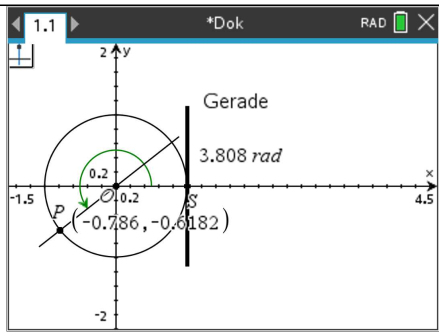
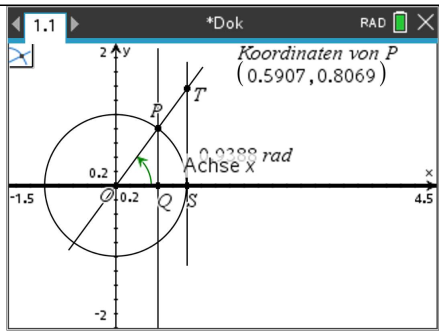
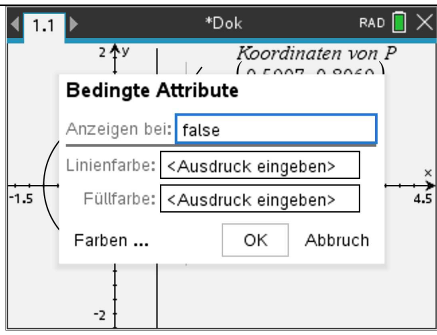
Trigonometrische Funktionen – Einheitskreis mit CAS

´Veranschaulichung zu Trigonometrischen Funktionen am Einheitskreis mit dem TI NSpire CX CAS (Tastenkombinationen gemäß Betriebssystem Version 4.5.2.8)

Wichtig: Stellen am Anfang auf das Bogenmaß um!! (doc 7 2 für das gesamte Dokument und eventuell auch mit menu 9 im Graphs-Fenster, und zwar sowohl für Geometrie- als auch Grafik-Winkel)

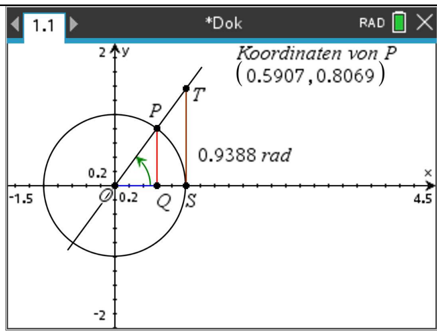
1. Erstelle ein neues Dokument, öffne ein Graphs - Fenster und stelle im Zeichenbereich (menu 4 1) XMin = –1.5 und XMax = 4.5 ein. Sorge durch ZoomQuadrat (menu 4 B) dafür, dass beide Achsen den gleichen Maßstab haben, damit ein Kreis auch als Kreis erscheint. Zeichne nun die Punkte $O(0\|0)$ und $S(1\|0)$ ein (z.B. menu 8 1 1 (tippen und dann die Koordinaten eintragen, danach sofort shift O für die Bezeichnung oder nachträglich im Kontextmenü (ctrl menu 2). Zeichne anschließend den Kreis um O durch S (menu 8 2 1). Setze einen Punkt auf dem Kreis (menu 8 1 2) und lasse dir durch das Kontextmenü dessen Koordinaten anzeigen (ctrl menu 7). Lösche, wenn nötig, mit dem Kontextmenü (ctrl menu) auch die Koordinaten von O und P.	
2. Messe mit menu 8 3 5 den gerichteten Winkel $\sphericalangle SOP$, indem du nacheinander diese drei Punkte anklickst. Bewege den Punkt P (mit ctrl greifen) und überzeuge dich davon, dass sich die Koordinaten und das Winkelmaß verändern. Zeichne nun die Gerade OP (menu 8 1 4)und die Gerade durch S senkrecht zur 1. Achse (menu 8 4 1). Konstruiere den Schnittpunkt (menu 8 1 3) dieser beiden Geraden und nenne ihn T.	
3. Bewege P wieder in den ersten Quadranten und verschiebe seine Koordinaten nach rechts oben, damit sie nicht mehr im Weg sind. (Den Text kannst du mit menu 1 7 einfügen.) Zeichnen jetzt ein rechtwinkliges Dreieck mit $\overline{OP}$ als Hypotenuse. Konstruiere dazu die Senkrechte zur 1. Achse durch P und nennen ihren Schnittpunkt mit der 1. Achse Q.	

Verberge nun die beiden Geraden PQ und ST, indem du im Kontextmenü den Punkt Bedingungen (ctrl menu C) auswählst und bei Anzeigen bei „false“ eintippst.



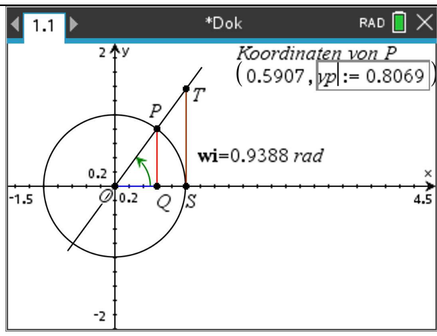
4. Zeichne nun die drei Strecken $\overline{OQ}$, $\overline{PQ}$ und $\overline{ST}$ ein (menu 8 1 5)-Mit dem Kontextmenüpunkt Farbe→Linienfarbe ((ctrl menu B 1) kannst du ihnen verschiedene Farben geben.

Im Folgenden wollen wir mit dem Maß dieses Winkels rechnen. Dafür muss man ihn mit Variablen verknüpfen



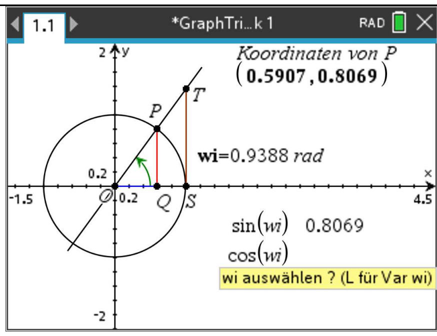
5. Um Variablen zu definieren klickt man auf einen Wert, drückt dann die Taste var und wählt 1: Variable speichern Wähle z.B. **wi** für den Winkel, **xp** und **yp** für die Koordinaten von *P*.
Die Koordinaten erscheinen danach fett.

Speichere diese Zeichnung unter dem Namen „GraphTrigFunk“ ab. Dann kannst du sie später von hier ab weiter verwenden.

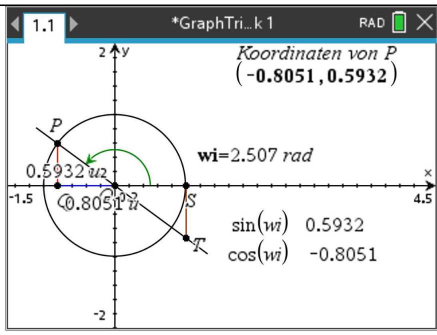


6. Erzeuge nun zwei Textfelder (menu 1 7) und schreibe „sin(wi)“ bzw. „cos(wi)“ hinein.
Klicke die Textfelder nacheinander an und wähle im Kontextmenü „Berechnen“ (ctrl menu 4) aus. Bestätige, durch die Taste L, dass für wi das Winkelmaß eingesetzt werden soll.

Vergleiche die berechneten Werte mit den Koordinaten von *P*. Bewege dabei *P* durch alle Quadranten.



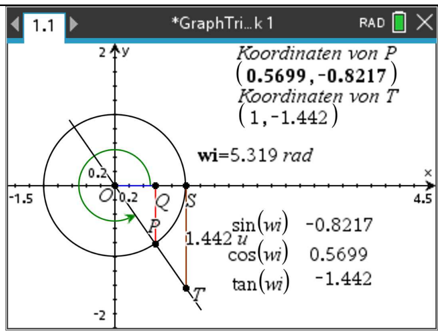
7. Der Betrag Koordinaten von P entspricht der Länge der Strecken $\overline{OQ}$ und $\overline{PQ}$. Wenn du willst, kannst du dich durch Messung (menu 8 3 1). davon überzeugen. Mache diese Schritte aber anschließend durch wiederholtes ctrl Z wieder rückgängig, da die Zeichnung sonst zu unübersichtlich wird.



8. Bleibt die Frage, wozu die Strecke $\overline{ST}$ gezeichnet wurde… Miss ihre Länge, stelle die Koordinaten von T dar, miss die Länge der Strecke und ergänze ein drittes Textfeld.

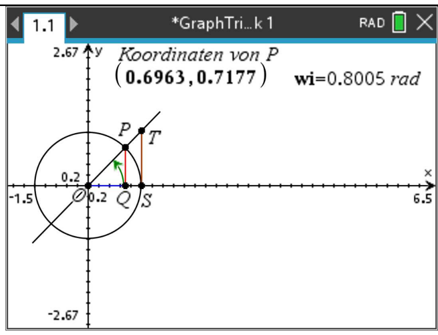
Verschiebe den Punkt P durch alle Quadranten. Achte genau auf Vorzeichen, größte/kleinste Werte, besondere Werte (0, ½. 1, …) der Winkelfunktionen und zu welchen Winkeln/Bogenmaßen sie gehören.

Speichere die fertige Zeichnung als „EinheitskreisTrigFunk“

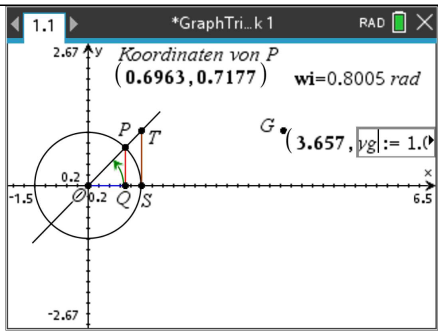


Im Weiteren sollst du dir den Verlauf der Graphen der Trigonometrischen Funktionen durch die Bewegung des Punktes P auf dem Einheitskreis verständlich machen.

9. Kehre dazu zu der nach Schritt 5. Abgespeicherten Datei zurück und ändere den Zeichenbereich in den Fenstereinstellungen auf XMin=–1.5 und XMax=6.5 und verwende wieder die ZoomQuadrat-Funktion.

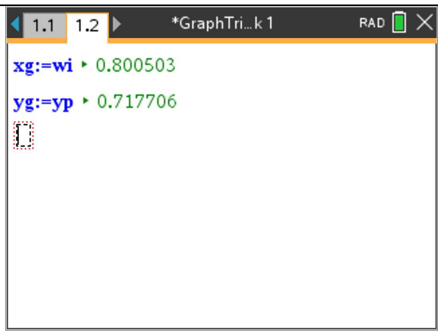


10. Der Funktionsgraph der Sinusfunktion ist die Menge aller Punkte G, deren Abszisse der Winkel und dessen Ordinate die Ordinate von P ist. Setze daher einen beliebigen Punkt G in das Koordinatensystem, lasse dir seine Koordinaten anzeigen und verknüpfe sie wie in Schritt 5. mit neuen Variablen **xg** und **yg**.



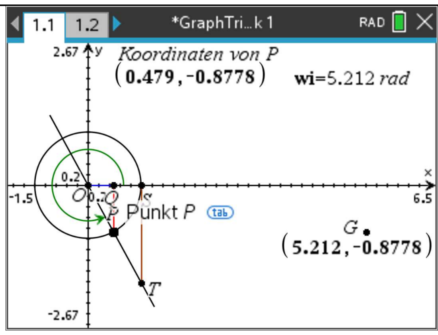
11. Um dem CAS mitzuteilen, wie die Koordinaten von G mit denen von P und mit dem Winkel verknüpft werden sollen, benötigst du ein neues Notes-Fenster. Öffne dieses mit [ctrl][doc▾][6]. Erstelle dann mit [ctrl][M] zwei MathBoxes und gib die Gleichungen **xg**:=**wi** und **yg**:=**yp** ein. Achte auf das Zuweisungszeichen „:=“, das du mit den Tasten [ctrl][⊞] eingeben kannst.

Wenn du dann zum Graphs -Fenster zurückwechselst und P verschiebst, sollten sich die Koordinaten von G anpassen.

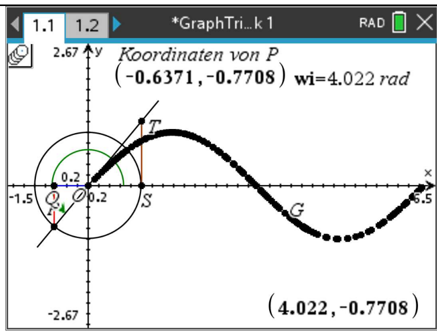
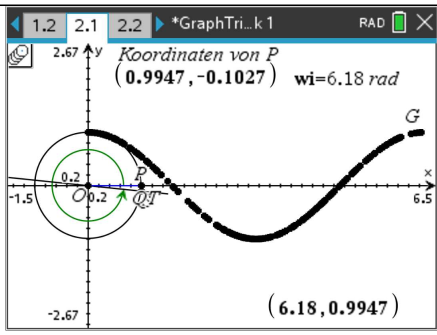
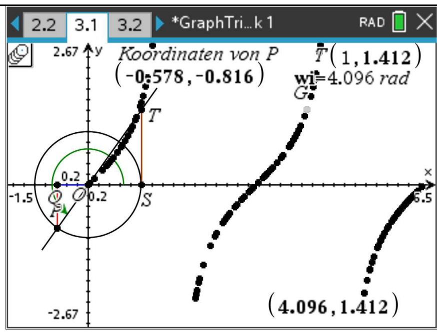


Achtung: den Punkt *G* darf man nicht greifen und verändern. Liegen *G* und *P* nah zusammen, ist dies schnell passiert. Achte darauf, was angezeigt wird, und benutze die [tab]-Taste. Ist es versehentlich doch passiert, muss man in Notes einfach die Verknüpfungen wieder neu schreiben.

Bewege P rund um den Einheitskreis und beobachte, wie sich G dabei bewegt.



<table>
<tr>
<td>12. Mit Hilfe des Menüpunktes Spur→Geometriespur (menu 5 4) kannst du nun die Ortskurve („Bahn“) von G darstellen.
Klicke dazu auf G und bewege dann P um den Einheitskreis.

Mit menu 5 5 kannst du die Geometriespur löschen.</td>
<td>
</td>
</tr>
<tr>
<td>13. Durch andere Verknüpfungen im Notes-Fenster (welche?) kannst du so auch den Graphen der Kosinusfunktion erhalten.</td>
<td>
</td>
</tr>
<tr>
<td>14. Und unter Verwendung der Ordinate von T gelingt dir bestimmt auch die Darstellung der Tangensfunktion.</td>
<td>
</td>
</tr>
</table>

Weiterführende Fragen:

1. Wie verändert sich die Ortskurve von *G*, wenn du den Radius des Kreises veränderst? (Dies erreichst du durch Ändern der 1. Koordinate von *S*. Denke daran, vorher die alte Geometriespur zu löschen!)
   Welche Funktionsgleichung gehört zu ihr?
2. Wie verändert sich die Ortskurve von *G*, wenn du für S einen anderen Punkt auf dem Einheitskreis wählst (z. B. $S(-\frac{1}{2}\sqrt{2}\,|\,\frac{1}{2}\sqrt{2})$ oder allgemein $S(\cos(\varphi)|\sin(\varphi))$)?
   Welche Funktionsgleichung gehört dazu?
3. Wie verändert sich die Ortskurve von *G*, wenn du *O* und *S* beide parallel nach oben verschiebst ((z.B $O(1|0)$ $S(1|1)$ oder allgemein $O(d|0)$ $S(d|1)$?
   Welche Funktionsgleichung gehört dazu?