Arbeitsauftrag für Freitag. 3.4.2020 und gegen Langeweile in den Ferien

Klassifizierung ganzrationaler Funktionen

1. Zur Erinnerung: **Über die Anzahl der Nullstellen ganzrationaler Funktionen**

Aus dem globalen Verhalten („Verhalten im Unendlichen") grF und dem Satz über die Linearfaktorzerlegung kann man Schlussfolgerungen über die Anzahl der Nullstellen ganzrationaler Funktionen ziehen.
Lesen Sie dazu noch einmal die Seite 205 ihres Lehrbuches gut durch und bearbeiten Sie

Aufgabe 1: Begründen Sie mit eigenen Worten und belegen Sie durch Beispiele:
(a) Jede ganzrationale Funktion 3. Grades hat immer mindestens eine Nullstelle.

Das globale Verhalten wird durch eine Potenzfunktion $g(x) = a_3x^3$ bestimmt.

Im Falle $a_3 > 0$ sind daher die Funktionswerte $f(a)$ für betragsmäßig große negative Werte von $x = a$ negativ und $f(b)$ für betragsmäßig große positive Werte von $x = b$ positiv.

Daher muss es dazwischen mindestens eine Nullstelle geben. Anschaulich wird das dadurch, dass die Graphen von grF keine „Lücken" oder „Sprünge" haben. (Man nennt sie stetig.) Dadurch müssen in einem Intervall $[a; b]$ auch alle Werte aus $y \in [f(a); f(b)]$ als Funktionswerte auftreten, d.h. es gibt eine Stelle $x_0 \in [a; b]$, so dass $f(x_0) = y$ gilt. (Das ist der „Zwischenwertsatz" für stetige Funktionen.) Da wegen des beschriebenen globalen Verhaltens $0 \in [f(a); f(b)]$ ist, gibt es daher ein $x_0 \in [a; b]$ mit $f(x_0) = 0$, also eine Nullstelle.

Im Falle $a_3 < 0$ sind umgekehrt die Funktionswerte $f(a)$ für betragsmäßig große negative Werte von $x = a$ positiv und $f(b)$ für betragsmäßig große positive Werte von $x = b$ negativ. Der Zwischenwertsatz kann entsprechend angewendet werden: Zu $y = 0 \in [f(b); f(a)]$ gibt es ein $x_0 \in [a; b]$ mit $f(x_0) = y = 0$, also auch in diesem Fall eine Nullstelle.

(b) Jede ganzrationale Funktion ungeraden Grades hat immer mindestens eine Nullstelle.

Das globale Verhalten wird durch eine Potenzfunktion $g(x) = a_nx^n$ mit ungeradem Exponenten n bestimmt. Für einen solchen gilt genau wie für $n = 3$, dass im Falle $a_n > 0$ die Funktionswerte $f(a)$ für betragsmäßig große negative Werte von $x = a$ negativ und $f(b)$ für betragsmäßig große positive Werte von $x = b$ positiv sind und im Falle $a_n < 0$ umgekejrt. Somit kann die weitere Argumentation aus (a) übertragen werden,
Man beachte hier auch den Spezialfall n = 1 (nicht konstante lineare Funktionen)!

(c) Es gibt zu jeder geraden Zahl n eine ganzrationale Funktion n. Grades, die keine Nullstellen hat.

Beispiele sind $f(x) = x^n + b$ oder $f(x) = -ax^n - b$ oder $f(x) = a(x^2 + b)^{n/2}$ mit $a, b > 0$.

(d) Eine ganzrationale Funktion 3. Grades kann eine, zwei oder drei Nullstellen haben.

eine Nullstelle: $f(x) = (x - x_0)^3 + c$ oder $f(x) = -x^3 - bx$ mit $b > 0$.

zwei Nullstellen: $f(x) = a_3(x - x_1)(x - x_2)^2$ mit zwei verschiedenen reellen Zahlen x_1, x_2. Dies ist auch gleichzeitig der allgemeine Fall. Denn sind x_1, x_2 zwei verschiedene Nullstellen, so gibt es nach dem Satz über die Polynomdivision ein Polynom 3–1–1 = 1. Grades $g(x)$, so dass $f(x) = (x - x_1)(x - x_2)g(x)$. Dieses Polynom hat als nicht konstante lineare Funktion genau eine Nullstelle. Da diese dann entweder gleich x_1 oder gleich x_2 sein muss, gilt $g(x) = m(x - x_1)$ oder $m(x - x_2)$. Setzt man dies ein, so hat man $f(x) = m(x - x_2)(x - x_1)^2$ bzw. $f(x) = m(x - x_1)(x - x_2)^2$. Die beiden Terme entsprechen einander durch Vertauschen von x_1 und x_2 . Durch Ausmultiplizieren bestätigt man, dass $m = a_3$ ist.

drei Nullstellen: $f(x) = a_3(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)$ mit drei verschiedenen reellen Zahlen x_1, x_2, x_3 . Auch dies ist der allgemeine Fall.

(e) Eine ganzrationale Funktion 4. Grades kann keine, eine, zwei, drei oder vier Nullstellen haben.

keine Nullstelle: $f(x) = ax^4 + bx^2 + c$ oder $f(x) = -ax^4 - bx^2 - c$ mit $a, b, c > 0$.

eine Nullstelle: $f(x) = a_4(x - x_0)^4$ oder $f(x) = a(x - x_0)^2(x^2 + b)$ $b > 0$.
(eine vierfache Nullstelle) (eine doppelte Nullstelle)

zwei Nullstellen: $f(x) = a_4(x - x_1)(x - x_2)(x^2 + b)$ (zwei einfache Nullstellen) oder
$f(x) = a_4(x - x_1)^2(x - x_2)^2$ (zwei doppelte Nullstellen)
$(x_1 \neq x_2, b > 0)$

drei Nullstellen: $f(x) = a_4(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)^2$
zwei einfache und eine doppelte Nullstelle.
Dass dies der allgemeine Fall ist, begründet man wie oben bei den zwei Nullstellen von grF dritten Grades.

Vier Nullstellen: $f(x) = a_4(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)(x - x_4)$

(f) * Die Anzahl der Nullstellen einer ganzrationalen Funktion n. Grades kann jede natürliche Zahl aus {1: …; n} sein, wenn n ungerade ist.

In (b) wurde begründet, dass 0 nicht als Anzahl auftreten kann.
Genau eine (n-fache) Nullstelle hat jede Funktion der Form $f_1(x) = a_n(x - x_1)^n$.
Jetzt ersetzen wird einen Linearfaktor $(x - x_1)$ durch $(x - x_2)$ mit $x_2 \neq x_1$ und erhalten somit eine Funktion mit zwei Nullstellen: $f_2(x) = a_n(x - x_1)^{n-1}(x - x_2)$.
Dann ersetzt man wieder einen Linearfaktor $(x - x_1)$ durch $(x - x_3)$ mit einer weiteren reellen Zahl x_3, die von beiden vorherigen x_1, x_2 verschieden ist. So erhält man eine grF n. Grades mit 3 Nullstellen. $f_3(x) = a_n(x - x_1)^{n-2}(x - x_2)(x - x_3)$
Dies führt man entsprechend fort: Wähle eine reelle Zahl x_k, die von allen vorherigen $x_1, \ldots, x_{k-1}$ verschieden ist und bilde $f_k(x) = a_n(x - x_1)^{n-k+1}(x - x_2) \ldots (x - x_k)$, was n. Grades ist und genau k Nullstellen hat. Führe dies bis k=n fort.
$f_n(x) = a_n(x - x_1)(x - x_2) \ldots (x - x_n)$

(g) * Die Anzahl der Nullstellen einer ganzrationalen Funktion n. Grades kann jede natürliche Zahl aus {0: 1: …; n} sein, wenn n gerade ist.

Genau wie (f), nur ohne die erste Zeile.

(h) * Die Summe der Vielfachheiten aller Nullstellen einer ganzrationalen Funktion n. Grades ist

i. immer eine gerade Zahl, wenn n gerade ist; dabei kann als Summe jede gerade Zahl ≤n auftreten.

Die Aussage trifft zum wenn die Funktion gar keine Nullstellen hat.
Hat die Funktion genau die Nullstellen $x_1, \dots, x_k$ mit den entsprechenden Vielfachheiten $n_1, \dots, n_k$. Sei $v = n_1 + \cdots + n_k$ die Summe aller Vielfachheiten.
Durch wiederholte Polynomdivision erhält man dann

$$f(x) = (x - x_1)^{n_1} \cdot \dots \cdot (x - x_k)^{n_k} \cdot g(x) .$$

Dabei ist $g(x)$ ein Polynom vom Grade $n - n_1 - \cdots - n_k = n - (n_1 + \cdots + n_k) = n - v.$
Wäre nun v ungerade, so wäre, da n gerade ist, auch $n - v$ ungerade. Nach dem in (b) begründeten hätte $g(x)$ also mindestens eine weitere Nullstelle. Diese wäre dann nach dem Nullproduktsatz auch eine Nullstelle von $f(x)$, was einen Widerspruch zur Voraussetzung ergäbe, dass $x_1, \dots, x_k$ alle Nullstellen und $n_1, \dots, n_k$ deren Vielfachheiten sein sollten.
Also kann v nicht ungerade sein und muss somit gerade sein.
Beispiele für jede gerade Vielfachheit:
$v = 0$: keine Nullstelle, siehe (c)
$v = 2$: $f(x) = (x - x_1)(x - x_2)g(x)$ oder $f(x) = (x - x_1)^2 g(x)$.
$v = 2k$: $f(x) = (x - x_1)^2 \cdot \dots \cdot (x - x_k)^2 \cdot g(x)$
Dabei ist jeweils $g(x)$ ein irreduzibles Polynom vom (geraden) Grade $n - v$ entsprechend einer grF dieses Grades ohne Nullstelle wie in (c).

ii. immer eine ungerade Zahl, wenn n ungerade ist; dabei kann als Summe jede ungerade Zahl ≤n auftreten.

Wie bei i. seien $x_1, \dots, x_k$ die Nullstellen von $f(x)$ mit den entsprechenden Vielfachheiten $n_1, \dots, n_k$ sowie $v = n_1 + \cdots + n_k$ die Summe aller Vielfachheiten.
Durch wiederholte Polynomdivision gilt ebenfalls $f(x) = (x - x_1)^{n_1} \cdot \dots \cdot (x - x_k)^{n_k} \cdot g(x)$, wobei $g(x)$ ein Polynom vom Grade $n - v$ ist. Wie oben begründet man, dass $n - v$ eine gerade Zahl sein muss, da das Polynom sonst mindestens eine weitere Nullstelle hätte. Da jetzt aber n ungerade ist, muss dann auch v ungerade sein.

Beispiele: $v = 1$ $f(x) = (x - x_1)g(x)$, z.B. = $f(x) = a_n(x - x_1)(x^{n-1} + b)$ mit $b > 0$.
$v = 2k + 1$: $f(x) = (x - x_1)^2 \cdot \dots \cdot (x - x_k)^2 \cdot (x - x_0) \cdot g(x)$.
Dabei ist wieder jeweils $g(x)$ ein irreduzibles Polynom vom (geraden) Grade $n - v$.

Die Vielfachheit einer Nullstelle x_0 ist dabei die Zahl k, die angibt, wie oft der Linearfaktor $(x - x_0)^k$ in der Linearfaktorzerlegung der ganzrationalen Funktion $f(x)$ auftritt. Im Beispiel $f(x) = (x - 2)(x - 5)^2(x + 4)^5(x^2 + 8)$ ist also die Vielfachheit der Nullstelle $x_0=2$ gleich 1, die von $x_0=5$ gleich 2, die von $x_0=-4$ gleich 5 und die von $x_0=-3$ gleich 0.

2. Über die Anzahl der Extrem-, Sattel- und Wendestellen von grF

Mit Hilfe der notwendigen und hinreichenden Bedingungen und der Überlegungen aus 1. Lassen sich Aussagen über die Anzahl der Extremstellen einer ganzrationalen Funktion treffen. Denn die 1. Ableitungsfunktion einer kubischen Funktion ist ja eine quadratische Funktion. Diese hat entweder keine Nullstelle, eine doppelte Nullstelle ohne Vorzeichenwechsel oder zwei einfache Nullstellen mit Vorzeichenwechsel, Daher gilt:

Satz 1: Jede ganzrationale Funktion 3. Grades hat entweder keine Extremstelle oder zwei Extremstellen.

Aufgabe 2: Begründen Sie :

(a) Jede ganzrationale Funktion 4. Grades hat immer mindestens eine Extremstelle.

(b) Eine ganzrationale Funktion 4. Grades hat entweder…

i. … genau eine Extremstelle oder

ii. … eine Extremstelle und eine Sattelstelle oder

iii. … drei Extremstellen.

Die 1. Ableitungsfunktion f' einer grF f 4. Grades ist eine grF 3. Grades.
f' hat als Funktion 3. Grades, wie oben in Aufgabe 1d) aufgeführt entweder

i. genau eine (einfache oder dreifache) Nullstelle.
Dies ist dann eine Nullstelle mit Vorzeichenwechsel, so dass f dort eine Extremstelle hat.

ii. genau zwei Nullstellen, von denen eine einfach, also mit Vorzeichenwechsel, und die andere doppelt, also ohne Vorzeichenwechsel ist.
Daher hat f dann eine Extremstelle und eine Sattelstelle.

iii. Drei einfache Nullstellen, die alle Nullstellen mit Vorzeichenwechsel sind.
Dies führt für f auf drei Extremstellen.

Aufgabe 3: Stellen Sie zu Satz 1 und den Aussagen aus Aufgabe 2 entsprechende Hypothesen für ganzrationale Funktionen größere Grades als 4 auf und begründen Sie diese. Hierbei sind auch die Aussagen aus Aufgabe 1 hilfreich.

Eine ganzrationale Funktion f fünften Grades hat entweder

i. keine Extrem- und keine Sattelstelle oder

ii. genau eine Sattelstelle und keine Extremstelle oder

iii. genau zwei Extremstellen, aber keine Sattelstelle oder

iv. genau zwei Extremstellen und genau eine Sattelstellen oder

v. genau vier Extremstellen

Begründung über die entsprechenden möglichen Nullstellen einer grF 4. Grades, wie sie als Ableitungsfunktion f' auftritt. Siehe Aufgabe 1 (e):

i. Keine Nullstelle von f'

ii. Eine einfache doppelte oder vierfache Nullstelle von f'

iii. Zwei einfache Nullstellen von f'

iv. Zwei einfache und eine doppelte Nullstelle von f'

v. Vier einfach Nullstellen von f'.

Eine Funktion ungeraden Grades hat immer eine gerade Anzahl an Extremstellen.
Denn wäre deren Anzahl ungerade, so hätte die erste Ableitung eine ungerade Anzahl an Nullstellen mit Vorzeichenwechsel, also eine ungerade Anzahl an Nullstellen ungerader Vielfachheit. Acuh wenn man dann noch die Vielfachheiten der Nullstellen ohne Vorzeichenwechsel hinzuzählt, so ergibt die Summe der Vielfachheiten immer eine gerade Zahl. Da die erste Ableitungsfunktion aber eine grF geraden Grades ist, wäre dies ein Widerspruch zu Aufgabe 1h)i..
Dies ist auch anschaulich im globalen Verlauf klar: Wenn die Funktion auf einer Seite im Unendlichen gegen $+\infty$ geht, auf der anderen Seite gegen $-\infty$, so muss sie immer zwei Mal die Monotonie („Steigungsrichtung“) wechseln.

Eine Funktion geraden Grades hat immer eine ungerade Anzahl an Extremstellen.
Begründung ganz entsprechend zum vorigen Punkt. Wäre die Anzahl der Extremstellen gerade, so hätte die erste Ableitung eine gerade Anzahl an Nullstellen mit Vorzeichenwechsel, also insgesamt eine gerade Summe aller Vielfachheiten. Da die erste Ableitungsfunktion aber eine grF ungeraden Grades ist, wäre dies ein Widerspruch zu Aufgabe 1h)ii.
Auch dies ist anschaulich im globalen Verlauf klar: Wenn die Funktion auf beiden Seiten im Unendlichen gegen $+\infty$ oder auf beiden Seiten gegen $-\infty$ geht, so muss sie einmal mehr die Monotonie („Steigungsrichtung“) in die andere Richtung wechseln.

Aufgabe 4: Begründen Sie:

(a) Jede ganzrationale Funktion 3. Grades hat genau eine Wendestelle.

Wendestellen entsprechen Nullstellen der 2. Ableitungsfunktion mit Vorzeichenwechsel. Da die zweite Ableitungsfunktion f'' einer grF dritten Grades f eine Funktion 1. Grades, mithin eine nicht konstante lineare Funktion ist, hat diese genau eine Nullstelle mit Vorzeichenwechsel und daher f eine Wendestelle.

(b) Eine ganzrationale Funktion 4. Grades hat entweder…

i. … keine Wendestelle oder
ii. … genau eine Sattelstelle und eine Wendestelle mit nicht horizontaler Tangente oder
iii. … zwei Wendestellen mit nicht horizontalen Tangenten.

Wendestellen entsprechen Nullstellen der 2. Ableitungsfunktion mit Vorzeichenwechsel. Da die zweite Ableitungsfunktion f'' einer grF vierten Grades f eine Funktion 2. Grades, mithin eine quadratische Funktion ist, hat diese entweder

a. keine Nullstelle oder
b. eine doppelte Nullstelle ohne Vorzeichenwechsel oder
c. zwei einfache Nullstellen mit Vorzeichenwechsel

a. und b. führen beide dazu, dass f keine Wendestelle hat, also zu Möglichkeit i.
c. führt zu zwei Wendestellen von f. Allerdings kann es nicht zwei Sattelstellen geben, da diese doppelten Nullstellen der 1. Ableitungsfunktion entsprächen. Hätte die erste Ableitungsfunktion aber zwei verschiedene doppelte Nullstellen, so müsste sie mindestens vierten Grades sein; sie ist aber dritten Grades. Daher kommen nur ii. und iii. in Betracht.

Aufgabe 5: (a) Stellen Sie eine zu Aufgabe 4b) ähnliche Hypothesen über die Wendestellen ganzrationaler Funktionen 5. Grades auf und begründen Sie diese.

Eine ganzrationale Funktion 5. Grades hat entweder…

i. … genau eine Wendestelle mit nicht horizontaler Tangente oder
ii. … genau eine Sattelstelle oder
iii. … genau drei Wendestellen, von denen
a. keine b. genau eine oder c. genau zwei sogar Sattelstellen sind.

Denn die zweite Ableitungsfunktion ist eine Funktion 3. Grades. Diese hat (siehe 1(d)) entweder
i. eine einfache Nullstelle, was einer Wendestelle ohne horizontaler Tangente der Ausgangsfunktion entspricht
oder ii. eine dreifache Nullstelle, was einer Sattelstelle der Ausgangsfunktion entspricht,
oder iii. drei einfache Nullstellen, die drei Wendestellen der Ausgangsfunktionen entsprechen. Davon können aber höchstens zwei auch doppelte Nullstellen der 1. Ableitungsfunktion und mithin Sattelstellen sein, da sonst die erste Ableitungsfunktion einen höheren Grad als vier haben müsste.
Die iv. Möglichkeit, dass die zweite Ableitungsfunktion eine einfache und eine doppelte Nullstelle hat, führt auch zu i. oder ii. Also gibt es nur die angegebenen Fälle.

(b) Stellen Sie Hypothesen über Anzahl und Art der Wendestellen ganzrationaler Funktionen höheren Grades au und begründen Sie diese.

Eine Funktion ungeraden Grades hat immer eine ungerade Anzahl an Wendestellen.
Eine Funktion geraden Grades hat immer eine gerade Anzahl an Wendestellen.
Beides lässt sich direkt mit der zweiten bzw. dritten Hypothese von Aufgabe 3 begründen, da Wendestellen ja den Extremstellen der 1. Ableitungsfunktion entsprechen.
Eine Funktion n. Grades hat höchstens $\frac{n-1}{2}$ Sattelstellen.
Denn die erste Ableitungsfunktion kann höchstens so viele doppelte Nullstellen haben.

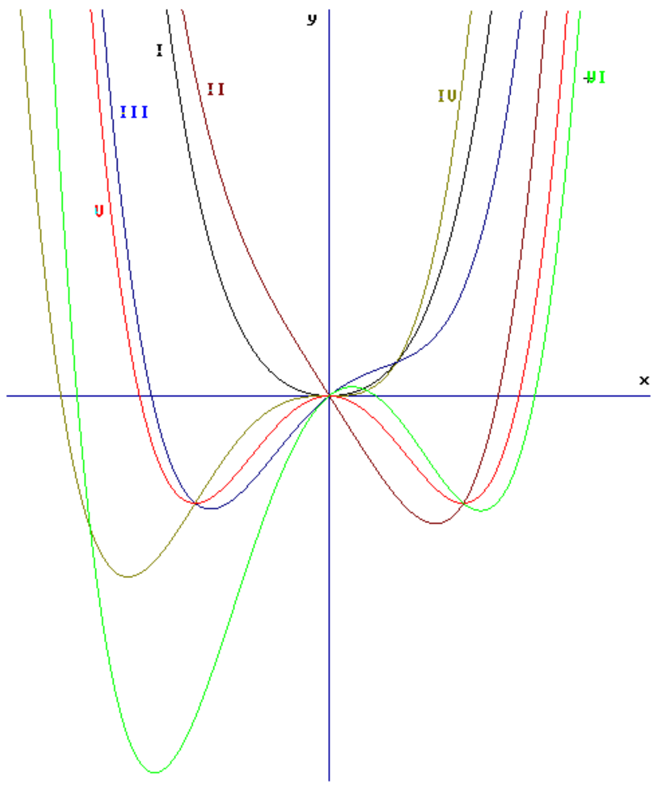
3. Klassifizierung ganzrationaler Funktionen 3. Grades

Aus den Überlegungen lassen sich Schlussfolgerungen darüber ziehen, welchen Verlauf der Graph einer ganzrationalen Funktion grundsätzlich haben kann. Da kubische Funktionen mindestens eine Wendestelle haben müssen und entweder keine oder zwei Extremstellen haben, gibt eigentlich nur 6 wesentlich verschiedene mögliche Verläufe.

Überlegen Sie, welche dies sind, und warum es nur diese Möglichkeiten gibt.
(Beachten Sie dabei nicht, auf welcher Höhe genau die Abszisse liegt, also wie viele Nullstellen die Funktion hat und wo diese liegen,)

Auf Seite 238 ihres Lehrbuches finden Sie (dann!) die Antwort und eine detaillierte Erklärung mit Hilfe der 1. Ableitungsfunktion.
Ähnlich wie man Lebewesen anhand ihrer Merkmale ordnet und kategorisiert, haben Sie hier die ganzrationalen Funktionen 3. Grades „klassifiziert".

* Aufgabe 6: Klassifizieren Sie auf gleiche Art und Weise die ganzrationalen Funktionen 4. Grades!



Eine mögliche Lösung mit zwei Mal 6 Typen:

I) parabelähnlicher Verlauf, nur 1 Tiefpunkt, keine Wendepunkte, achsen-symmetrisch (Beispiel $y = x^4 + x^2$)

II) wie I), jedoch ohne Symmetrie
($y = x^4 - 2x$)

III) wie II), jedoch mit 2 Wendepunkten
($y = x^4 - 2x^2 + x$)
Die Wendepunkte können auch auf der anderen Seite des Extrempunktes sein ($y = x^4 - 2x^2 - x$)

IV) wie III), jedoch mit 1 Sattelpunkt
($y = x^4 + 2x^3$)

V) 3 Extremstellen, 2 Wendepunkte, achsensymmetrisch ($y = x^4 - 2x^2$)

VI) wie V), aber ohne Symmetrie
($y = x^4 - 3x^2 + x$)

6 weitere Typen erhält man durch Spiegelung an der x-Achse.

<u>Aufgabe 7:</u> Beweisen Sie;
Der Graph jeder ganzrationalen Funktion ist punktsymmetrisch zu ihrem Wendepunkt.
Anleitung: Beweisen Sie: Wenn W(x_W | y_W) der Wendepunkt von $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ ist und m_W die Steigung seiner Wendetangente, so gilt $f(x) = a(x - x_W)^3 + m_W(x - x_W) + y_W$.

Mit den ersten beiden Ableitungsfunktionen $f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$ und $f''(x) = 6ax + 2b$ erhält man, dass die notwendige Bedingung für eine Wendestelle $0 = f''(x_w) = 6ax_w + 2b \Leftrightarrow x_w = -\frac{b}{3a}$ ist.
Die hinreichende Bedingung ist wegen $a \neq 0$ erfüllt.
Die Steigung der Wendetangente beträgt
$m_w = f'(x_w) = f'\left(-\frac{b}{3a}\right) = 3a\left(-\frac{b}{3a}\right)^2 + 2b\left(-\frac{b}{3a}\right) + c = \frac{b^2}{3a} - 2\frac{b^2}{3a} + c = c - \frac{b^2}{3a}$.
Einsetzen des Terms für die Wendestelle ergibt $m_w = c + b \cdot \frac{-b}{3a} = c + bx_w$ und damit für den linearen Term aus der Anleitung
$m_W(x - x_W) = (c + bx_W)(x - x_W) = cx - cx_W + bxx_W - bx_w^2$
Mit Hilfe des Binomischen Lehrsatzes multipliziert man aus:
$(x - x_W)^3 = x^3 - 3x^2x_w + 3xx_w^2 - x_w^3$ und nach teilweisem Einsetzen des Terms für die Wendestelle:
$a(x - x_W)^3 = ax^3 - 3ax^2\frac{-b}{3a} + 3axx_W\frac{-b}{3a} - ax_w^3 = ax^3 + bx^2 - bxx_W - ax_w^3$.
Zusammen ergibt sich

$$\begin{aligned} a(x - x_W)^3 + m_W(x - x_W) &= ax^3 + bx^2 - bxx_W - ax_w^3 + cx - cx_W + bxx_W - bx_w^2 = \\ &= ax^3 + bx^2 + cx - ax_w^3 - bx_w^2 - cx_W + d - d \\ &= ax^3 + bx^2 + cx + d - (ax_w^3 + bx_w^2 + cx_W + d) \\ &= f(x) - f(x_W)\,. \end{aligned}$$

Damit ist durch Addition von $y_W = f(x_W)$ auf beiden Seiten gezeigt, dass $f(x) = a(x - x_W)^3 + m_W(x - x_W) + y_W$ ist. Dies bedeutet aber, dass der Graph der Funktion f aus dem Graphen der Funktion $g(x) = ax^3 + m_Wx$ durch Verschiebung um x_W in Richtung der Abszisse und um y_W in Richtung der Ordinate hervorgeht:
$f(x) = g(x - x_W) + y_W$. Da der Graph von g punktsymmetrisch zum Ursprung ist, ist somit der Graph von f punktsymmetrisch zum verschobenen Symmetriepunkt W(x_W | y_W).