Name: ____________________ 26.02.20

Klausur Nr. 3

Teil A – Hilfsmittelfreier Teil (21 BE, 36 %, höchstens 30 Minuten)

<u>Aufgabe 1:</u> *[5 BE]* *Entscheiden* Sie, ob die folgenden Aussagen korrekt sind.
(Operator „entscheiden" verlangt eine Begründung. Zur Begründung können Sie die Aussage verbessern oder ein Gegenbeispiel angeben.)

a. Ist $f'(x_0) = 0$, so hat die Funktion f in x_0 eine Extremstelle. *(2)*
b. Wenn $f''(x_0) > 0$ ist, dann ist x_0 stets ein lokales Maximum von f. *(3)*

<u>Aufgabe 2:</u> *[9 BE]*
a) *Geben* Sie alle ***rationalen Zahlen*** *an*, die als Nullstellen von

$f(x) = 2x^3 - 9x^2 - 10x + 7$ in Frage kommen könnten. *(2)*

b) Eine Nullstelle ist $x_1 = \frac{1}{2}$. *Berechnen* Sie die weiteren Nullstellen. *(6)*
c) *Geben* Sie die Linearfaktorzerlegung von $f(x)$ *an*. *(1)*

<u>Aufgabe 3:</u> *[7 BE]*
Von der Funktion f sind die erste und zweite Ableitung bereits berechnet worden (siehe rechts).
Berechnen Sie alle Maximal- und Minimalstellen von f.

$$f(x) = \frac{1}{5}x^2(x-5)^3$$
$$f'(x) = x(x-2)(x-5)^2$$
$$f''(x) = 2(x-5)(2x^2-8x+5)$$

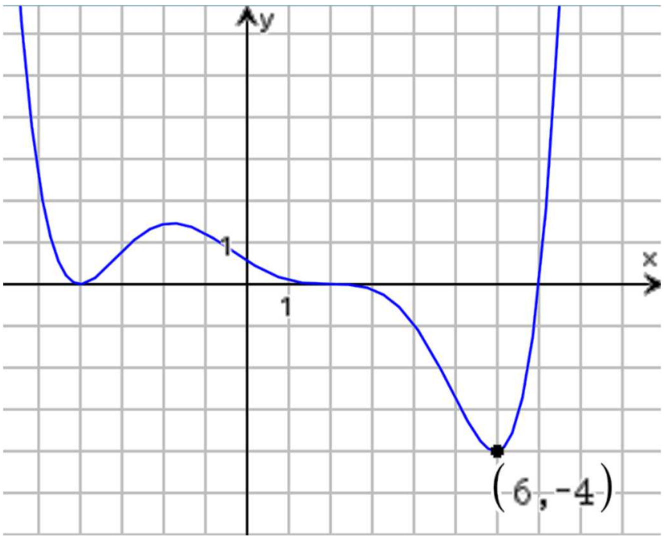
Ende Teil A

EPAM01, M02 / Ri, Vh

Name: ____________________ 26.02.20

Klausur Nr. 3

Teil B – mit Formelsammlung und CAS (37 BE, 64 %)



Aufgabe 4: *[7 BE]*

Die Abbildung rechts zeigt den Graphen einer ganzrationalen Funktion 6 Grades f.

Bestimmen Sie eine geeignete Funktionsgleichung.

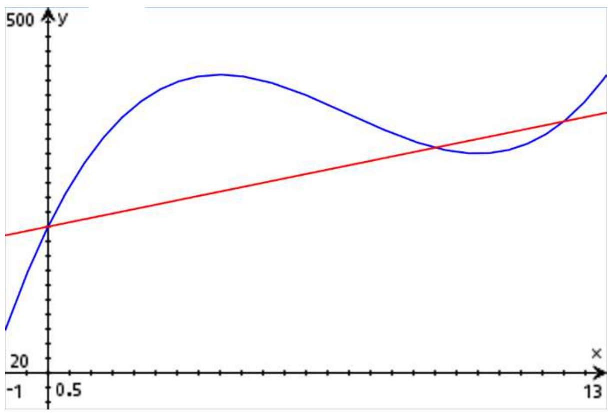
Aufgabe 5: *[17 BE]*

Der für den Verkauf zuständige Manager eines Unternehmens prognostiziert, dass sich der Umsatz in den folgenden 12 Monaten (Januar bis Dezember) durch die Funktion f mit

$$f(t) = t^3 - 21t^2 + 120t + 200$$

(t in Monaten,
$f(t)$ in 1000€ am Tag.)

beschreiben lässt.



a. *Geben* Sie die Zeiträume *an*, in denen nach dieser Prognose der Umsatz steigen bzw. fallen wird. *(4)*

b. *i. Ermitteln* Sie die momentane Änderungsrate des Umsatzes zum Zeitpunkt $t = 3$. *(3)*

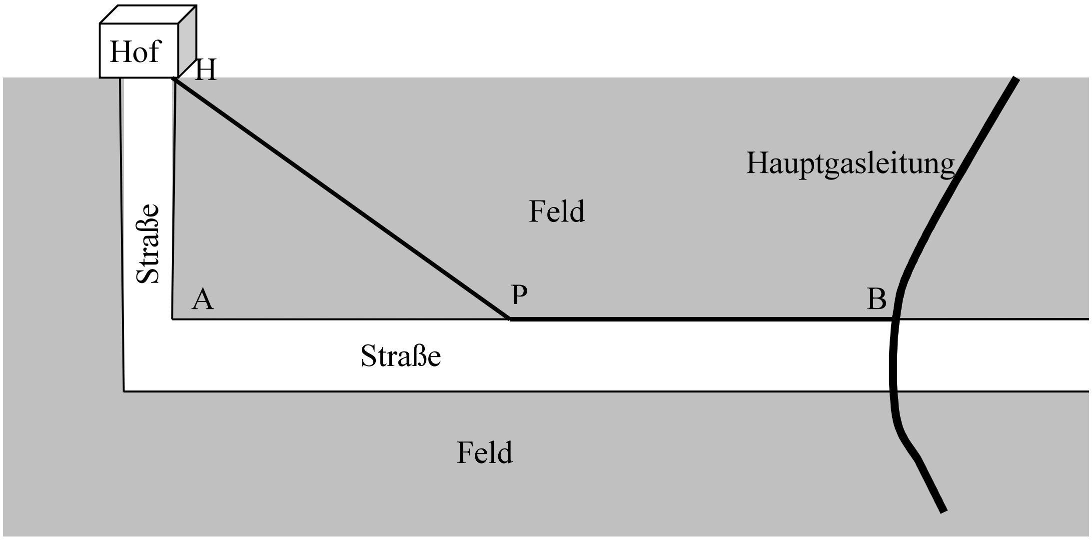
ii. *Bestimmen* Sie den Zeitpunkt innerhalb der 12 Monate, an dem sich der Umsatz am stärksten ändert. *(5)*

Der Geschäftsführer ist vorsichtiger. Er nimmt an, dass der Umsatz während der betrachteten 12 Monate linear so ansteigt, dass am Anfang und am Ende des Beobachtungszeitraumes die Verkaufszahlen beider Prognosen gleich sind, und verwendet daher die Funktion

$$g(t) = 12t + 200$$

c. *Ermitteln* Sie, zu welchem Zeitpunkt der Unterschied der prognostizierten Umsatzzahlen am größten ist. *(5)*

Aufgabe 6: [13 BE]
Der Hof eines Landwirtes soll zu möglichst geringen Kosten an die Gasversorgung angeschlossen werden. Er überlegt deshalb, einen Teil der Leitungen querfeldein legen zu lassen.



Die Kosten für eine Verlegung längs der Zufahrtstraße zu seinem Hof betragen 25 € pro Meter, im Feld 35 € pro Meter.
Die Zufahrtsstraße knickt am Punkt A rechtwinklig ab. A ist 500 m vom Hof und 1400 m vom Anschlusspunkt B der Gasversorgung entfernt.

a) *Bestimmen* Sie die Kosten, wenn…
   i. … die Gasleitung nur entlang der Straße verlegt wird. *(1½)*
   ii. … die Gasleitung von B aus direkt zum Hof verlegt wird. *(2½)*
b) *Erläutern* Sie im Sachzusammenhang die Bedeutung des folgenden Terms und seiner Bestandteile
   $35 \cdot \sqrt{250000 + x^2} + 25 \cdot (1400 - x)$. *(5)*
c) *Ermitteln* Sie die optimale Lage von P. *(4)*

Teil A: von 21 BE Teil B: von 37 BE

von erwarteten BE erreicht, das sind %.

Beurteilung: P. Datum: Handzeichen:

Notenspiegel:

ab ... %	95	90	85	80	75	70	65	60	55	50	45	40	33	27	20	
ab … BE																
Beurteilung	**15**	**14**	**13**	**12**	**11**	**10**	**9**	**8**	**7**	**6**	**5**	**4**	**3**	**2**	**1**	**0**
Anzahl																

Durchschnitt: Punkte

Lösungen/Korrekturvorlage Klausur Nr. 3

Teil A – Hilfsmittelfreier Teil (21 BE, %, 30 Minuten)

Aufgabe 1: [2 + 3 = 5 BE] *Entscheiden* Sie, ob die folgenden Aussagen korrekt sind.
(Operator „entscheiden“ verlangt eine Begründung. Zur Begründung können Sie die Aussage verbessern oder ein Gegenbeispiel angeben.)

a. Ist $f'(x_0) = 0$, so hat die Funktion f in x_0 eine Extremstelle.

Die Bedingung ist notwendig, aber nicht hinreichend.
Z.B. gilt für $f(x) = x^3$ und $x_0 = 0$: $f'(0) = 0$, aber 0 ist Sattel- statt Extremstelle
Richtig wird die Aussage durch Vertauschen von Voraussetzung und Behauptung:
Hat die Funktion f in x_0 eine Extremstelle, so ist $f'(x_0) = 0$. (2) eines davon reicht aus
Oder durch Ergänzen von $f''(x_0) \neq 0$ in der Voraussetzung.
Ist $f'(x_0) = 0$ und $f''(x_0) \neq 0$ so hat die Funktion f in x_0 eine Extremstelle.

b. Wenn $f''(x_0) > 0$ ist, dann ist x_0 stets ein lokales Maximum von f.

1.) Die Voraussetzung alleine genügt nicht, denn notwendig ist zudem $f'(x_0) = 0$.
2.) Aus $f'(x_0) = 0$ und $f''(x_0) > 0$ folgt, dass x_0 eine **Minimal**stelle ist.
3.) Dann ist x_0 eine Minimal**stelle**, $f(x_0)$ wäre das (lokale Minimum) je (1)

Aufgabe 2: [2+ 6 +1 = 9 BE]

a) *Geben* Sie alle ***rationalen/ganzen Zahlen*** *an*, die als Nullstellen von

$f(x) = 2x^3 - 9x^2 - 10x + 7$ in Frage kommen könnten.

Die Zähler sind Teiler des konstanten Gliedes $a_0 = 7$, $T_7 = \{1;7\}$. (1)
Die Nenner sind Teiler des führenden Koeffizienten $a_3 = 2$, $T_2 = \{1;2\}$. (½)
Also kommen in Frage: $1; 7; \frac{1}{2}; \frac{7}{2}$ und ihre Gegenzahlen $-1; -7; -\frac{1}{2}; -\frac{7}{2}$. (Gegenzahlen (½))

b) Eine Nullstelle ist $x_1 = \frac{1}{2}$. *Berechnen* Sie die weiteren Nullstellen.

Dann ist $(x - x_1) = (x - \frac{1}{2})$ ein Linearfaktor und die Polynomdivision durch $(x - \frac{1}{2})$ geht auf:

$$f(x):\left(x-\frac{1}{2}\right) = (2x^3 - 9x^2 - 10x + 7):\left(x-\frac{1}{2}\right) = 2x^2 - 8x - 14 \quad (4)$$

$$\begin{array}{l} \underline{2x^3 - 1x^2} \\ \quad -8x^2 - 10x \\ \quad \underline{-8x^2 + 4x} \\ \qquad -14x + 7 \\ \qquad \underline{-14x + 7} \\ \qquad\qquad 0 \end{array}$$

Damit ist

$$f(x) = \left(x-\frac{1}{2}\right)(2x^2 - 8x - 14) = 2\left(x-\frac{1}{2}\right)(x^2 - 4x - 7)$$

Nach dem Nullproduktsatz sind die weiteren Nullstellen von f die Nullstellen des quadratischen Polynoms $x^2 - 4x - 7$. Berechne diese mit der p-q-Formel:

$$x^2 - 4x - 7 = 0 \qquad x_{2/3} = -\frac{-4}{2} \pm \sqrt{2^2 - (-7)} = 2 \pm \sqrt{11} \text{ .v} \quad (2)$$

Die weiteren Nullstellen sind also $x_2 = 2 + \sqrt{11}$ und $x_3 = 2 - \sqrt{11}$.

c) *Geben* Sie die Linearfaktorzerlegung von $f(x)$ *an*.

$$f(x) = 2\left(x-\frac{1}{2}\right)(x - 2 + \sqrt{11})(x - 2 - \sqrt{11}) \quad (1)$$

Aufgabe 3: [7 BE]

Von der Funktion f sind die erste und zweite Ableitung bereits berechnet worden (siehe rechts).
Berechnen Sie alle Maximal- und Minimalstellen von f.

$$f(x) = \frac{1}{5}x^2(x-5)^3$$
$$f'(x) = x(x-2)(x-5)^2$$
$$f''(x) = 2(x-5)(2x^2-8x+5)$$

Notwendige Bedingung für eine Extremstelle ist
$f'(x) = 0$ <==> $x(x-2)(x-5)^2 = 0$ (1)

Nach dem Nullproduktsatz gilt dies genau dann, wenn $x = 0$ oder $x = 2$ oder $x = 5$ (1)

1. Hinreichende Bedingung für eine Extremstelle ist ein Vorzeichenwechsel von $f'(x)$. (1)
Da $x = 0$ und $x = 2$ einfache Nullstellen von $f'(x)$ sind, findet dort ein Vorzeichenwechsel statt.
Da $x = 5$ eine doppelte Nullstelle von $f'(x)$ist, findet dort kein Vorzeichenwechsel statt.

Vorzeichenbetrachtung; (Es ist z.B. $f'(6) = 6 \cdot 4 \cdot 1^2$=24>0.) Schema (2)

x	$x<0$	0	$0<x<2$	2	$2<x<5$	5	$x>5$
$f'(x)$	+	0	–	0	+	0	+
$f(x)$	↗	H	↘	T	↗	S	↗

Da bei $x = 0$ ein Vorzeichenwechsel von $f'(x)$ von – nach + stattfindet,
ist $x = 0$ Maximalstelle von f.

Je Begründung (1) statt Schema

Da bei $x = 2$ ein Vorzeichenwechsel von $f'(x)$ von + nach – stattfindet,
ist $x = 2$ Minimalstelle von f.

je (½)

Da bei $x = 5$ kein Vorzeichenwechsel von $f'(x)$ stattfindet, ist $x = 5$ keine Extremstelle. (1)
$x = 5$ ist stattdessen eine Sattelstelle von f.

2. Hinreichende Bedingung für eine Extremstelle ist (zusätzlich) $f''(x) \neq 0$.
$f''(0) = 2(0-5)(2 \cdot 0^2 - 8 \cdot 0 + 5) = -50 < 0$. Also ist $x = 0$ Maximalstelle von f.

$f''(2) = 2(2-5)(2 \cdot 2^2 - 8 \cdot 2 + 5) = 2 \cdot (-3) \cdot (-3) = +18 > 0$.
Also ist $x = 2$ Minimalstelle von f.

$f''(5) = 2(5-5)(2 \cdot 5^2 - 8 \cdot 5 + 5) = 2 \cdot 0 \cdot 15 == 0$. Keine Entscheidung möglich.

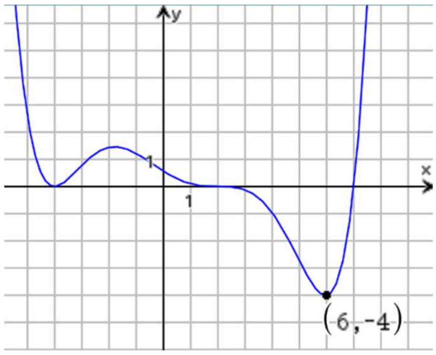
Lösungen/Korrekturvorlage Klausur Nr. 3

Teil B – mit Formelsammlung und CAS (36 BE, %)

Aufgabe 4: [7 BE]

Die Abbildung rechts zeigt den Graphen einer ganzrationalen Funktion 6 Grades f.

Bestimmen Sie eine geeignete Funktionsgleichung.



Nullstellen ablesen: $x_1 = -4$ (ohne Vorzeichenwechsel, also doppelt)
je (½) $x_2 = 2$ (mit Vorzeichenwechsel, Sattelstelle also dreifach)
$x_3 = 7$ (mit Vorzeichenwechsel, also einfach).

je (1) in Verbindung mit Exponent

Daher Ansatz $f(x) \overset{(1)}{=} a \cdot (x+4)^2(x-2)^3(x-7)$. (Ist in der Tat 6. Grades!)

Koordinaten des Punktes P(6 | –4) dort einsetzen und nach a auflösen:

(1½)

$f(6) = a \cdot (6+4)^2(6-2)^3(6-7) = a \cdot 100 \cdot 64 = 6400a = -4$

<==> $a = \frac{-4}{6400} = -\frac{1}{1600}$ Damit erhält man $f(x) = -\frac{1}{1600}(x+4)^2(x-2)^3(x-7)$. (1)

Zeichnen mit dem CAS bestätigt dies. Ausmultipliziert mit CAS zeigt sich zudem, dass der Term 6. Grades ist:

expand$(f1(x),x)$ $\quad \frac{x^6}{1600} - \frac{x^5}{320} - \frac{17 \cdot x^4}{800} + \frac{33 \cdot x^3}{400} + \frac{23 \cdot x^2}{200} - \frac{16 \cdot x}{25} + \frac{14}{25}$

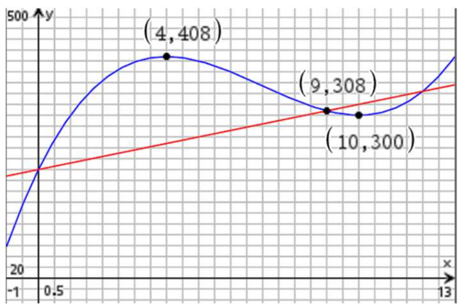
Aufgabe 5: [4 + (3+5) + 5 = 17 BE]

Der für den Verkauf zuständige Manager eines Unternehmens prognostiziert, dass sich der Umsatz in den folgenden 12 Monaten (Januar bis Dezember) durch die Funktion f mit

$$f(t) = t^3 - 21t^2 + 120t + 200$$

(t in Monaten,
$f(t)$ in 1000€ am Tag.)

beschreiben lässt.



a. *Geben* Sie die Zeiträume *an*, in denen nach dieser Prognose der Umsatz steigen bzw. fallen wird.

Zeichnen des Graphen mit dem CAS und Ablesen des Hochpunktes H(4|408) und des Tiefpunktes T(10|300) zeigt, dass

1.) $f(t)$ in den Intervallen [0;4] und [10;12] streng monoton steigt. Also steigt der Umsatz von (Anfang) Januar bis (Ende) April sowie von (Anfang) November bis (Ende) Dezember.
2.) $f(t)$ im Intervall [4;10] streng monoton fällt. Also fällt der Umsatz von (Anfang) Mai bis (Ende) Oktober.

(1) je Intervall
(1) Monate

5b) i. *Ermitteln* Sie die momentane Änderungsrate des Umsatzes zum Zeitpunkt $t = 3$.
ii. *Bestimmen* Sie den Zeitpunkt innerhalb der 12 Monate, an dem sich der Umsatz am stärksten ändert.

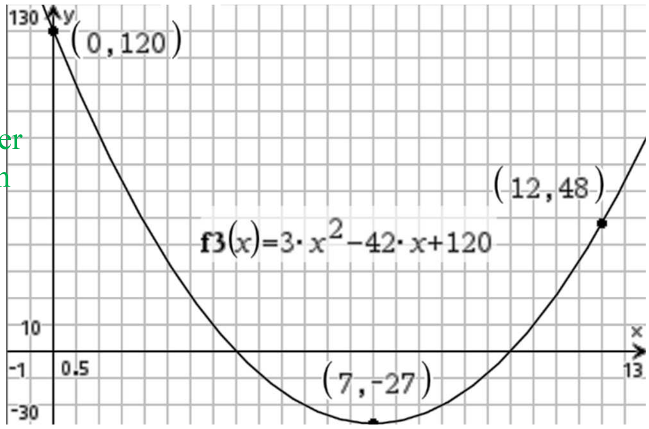
Die momentane Änderungsrate ist durch die erste Ableitungsfunktion gegeben. (1)

Diese lautet $f'(t) = 3t^2 - 42t + 120$ (1)

i. Einsetzen ergibt: $f'(3) = 21$. Wert (½) Also beträgt die momentane Änderungsrate bei $t = 3$. (Mitternacht vom 31. März zum 1. April) 21000 €/Monat. Einheit (½)

ii. Gesucht sind Extremstellen der 1. Ableitungsfunktion. (½)

Ablesen am Graphen ergibt ein inneres Minimum bei $f'(7) = -27$. (1) Skizze (1) oder Dokumentation



An den Rändern des im Sachzusammenhang relevanten Intervalls [0;12] gilt

$f'(0) = 120$ (1) (linkes Randmaximum) und

$f'(12) = 48$ (½) (rechtes Randmaximum) .

Da |120| > |48| > |–27| ändert sich der Umsatz am stärksten für $t = 0$, also direkt zu Jahresbeginn. (1)

Berechnung der inneren Extremstelle (nicht verlangt):

Notwendige Bedingung: $0 = (f')'(t) = 6t - 42$ <==> $t = 7$

Hinreichende Bedingung $= (f')''(t) = 6 > 0$, also ist $t = 7$ Minimalstelle. Weiter wie oben,

Der Geschäftsführer ist vorsichtiger. Er nimmt an, dass der Umsatz während der betrachteten 12 Monate linear so ansteigt, dass am Anfang und am Ende des Beobachtungszeitraumes die Verkaufszahlen beider Prognosen gleich sind, und verwendet daher die Funktion

$$g(t) = 12t + 200$$

5c) *Ermitteln* Sie, zu welchem Zeitpunkt der Unterschied der prognostizierten Umsatzzahlen am größten ist.

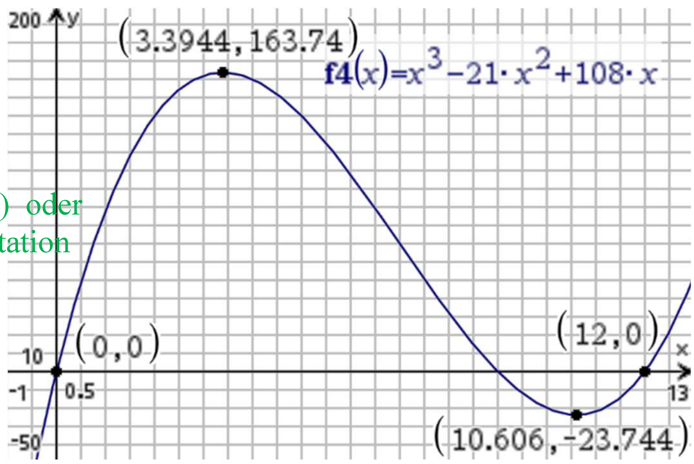
Gesucht sind Maximal- und Minimalstellen der Differenzfunktion (1)

$$h(t) = f(t) - g(t) = (t^3 - 21t^2 + 120t + 200) - (12t + 200) = t^3 - 21t^2 + 108t$$

Ablesen der Extrempunkte:

H(3,3944 | 163,74) (1) T(10,606 | –23,744) (½)

An den Randstellen $t = 0$ und $t = 12$ (½) beträgt die Abweichung jeweils Null, da die lineare Funktion $g(t)$ so bestimmt wurde. Skizze (1) oder Dokumentation



Damit ist die Abweichung zum Zeitpunkt

$t = 3{,}394$ mit 163740 € am größten. (1) (Das entspricht etwa dem 12. April um 20 Uhr abends.)

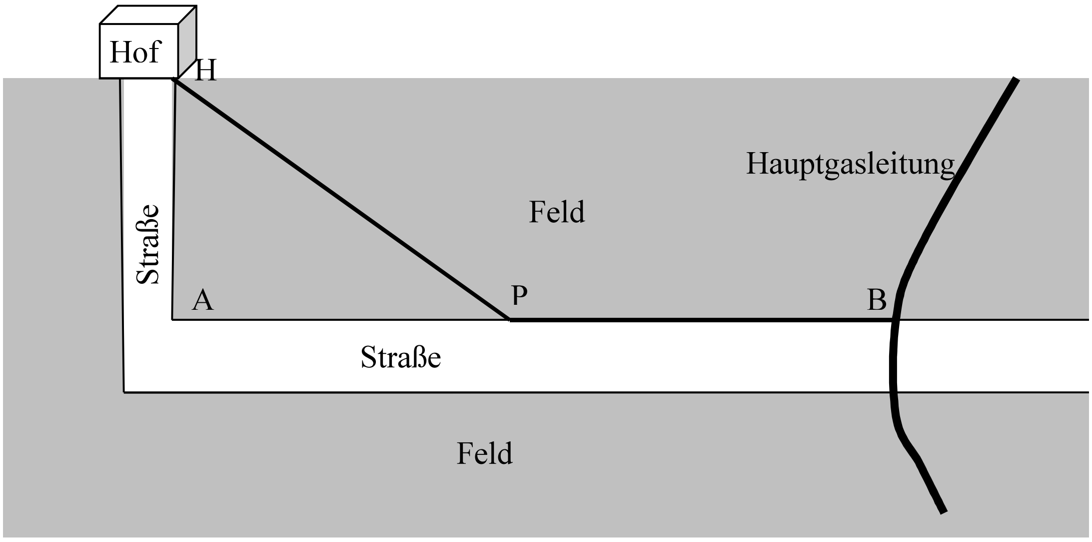
Ermittlung mit Hilfe der ersten Ableitungsfunktion:

$h'(t) = 3t^2 - 42t + 108 = 3(t^2 - 14t + 36) = 0$ <==> $t = 7 - \sqrt{13}$ oder $t = 7 + \sqrt{13}$
$t \approx 3.394448724536$ oder $t \approx 10.605551275464$

$h(7 - \sqrt{13}) = 70 + 26\sqrt{13} \approx 163.74433316206$ $h(7 + \sqrt{13}) = 70 - 26\sqrt{13} \approx -23.744333162064$

Aufgabe 6: [(1½+2½) + 5 + 4 = 13 BE]

Der Hof eines Landwirtes soll zu möglichst geringen Kosten an die Gasversorgung angeschlossen werden. Er überlegt deshalb, einen Teil der Leitungen querfeldein legen zu lassen.



Die Kosten für eine Verlegung längs der Zufahrtstraße zu seinem Hof betragen 25 € pro Meter, im Feld 35 € pro Meter.
Die Zufahrtsstraße knickt am Punkt A rechtwinklig ab. A ist 500 m vom Hof und 1400 m vom Anschlusspunkt B der Gasversorgung entfernt.

a) *Bestimmen* Sie die Kosten, wenn…
   j. … die Gasleitung nur entlang der Straße verlegt wird.
   ii. … die Gasleitung von B aus direkt zum Hof verlegt wird.

b) *Erläutern* Sie im Sachzusammenhang die Bedeutung des folgenden Terms und seiner Bestandteile
   $35 \cdot \sqrt{250000 + x^2} + 25 \cdot (1400 - x)$.

c) *Ermitteln* Sie die optimale Lage von P.

a) i. Kosten entlang Straße $25\,\frac{€}{\text{m}} \cdot (500\text{ m} + 1400\text{ m}) = 25\,\frac{€}{\text{m}} \cdot 1900\text{ m} = 47\,500\text{ €}$. (1) (½)

ii. Berechne die Länge der Strecke $\overline{HB}$ mithilfe des Satzes des Pythagoras (Straße knickt rechtwinklig ab): $|\overline{HB}| = \sqrt{500^2 + 1400^2} = \sqrt{221} \cdot 100 \approx 1486.606874\ldots$ (1) (½)

$35\,\frac{€}{\text{m}} \cdot 1486{,}61\text{ m} = 52031.2406156\ldots\text{ €} \approx 52031{,}24\text{ €}$ betragen die Kosten auf kürzestem Wege durch das Feld. (1)

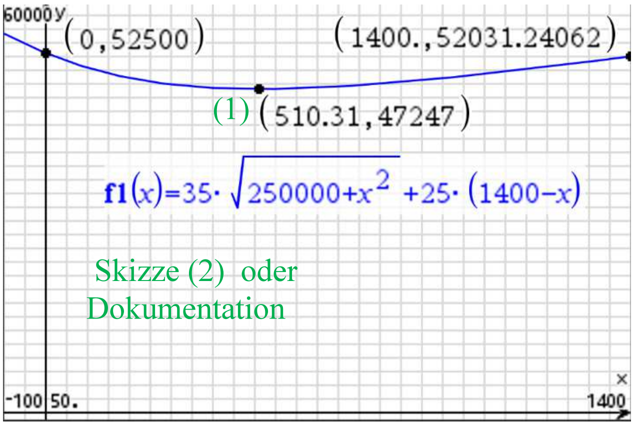
b) Der Term berechnet die Kosten in € für eine Verlegung der Gasleitung querfeldein vom Hof H aus zu einem (variablen) Punkt P am Rand der Straße, also der Strecke $\overline{AB}$ und von dort weiter entlang der Straße zur Anschlussstelle B. (1)

x ist dabei die Entfernung des Punktes P vom Punkt A (der Straßenecke): $x = |\overline{AP}|$ in Metern. (1)

$\sqrt{250000 + x^2} = \sqrt{500^2 + x^2} = \sqrt{|\overline{HA}|^2 + |\overline{AP}|^2} = |\overline{HP}|$ ist dann die Länge der Querfeldeinstrecke (1) in m. Dies multipliziert mit den Kosten pro Meter hierfür (35), also der erste Summand, sind die Kosten für die Verlegung des Abschnitts der Gasleitung querfeldein in €. (½)

$(1400 - x)$ ist die Länge der Strecke $\overline{PB}$ in Metern, (1) also des Abschnittes der Gasleitung entlang der Straße. Multipliziert mit 25, also den Kosten pro Meter, ergibt sich der zweite Summand, die Kosten für die Verlegung des Abschnitts der Gasleitung entlang der Straße in €. (½)

c) Zeichnen des Graphen mit dem CAS und Ablesen der Minimalstelle im relevanten Intervall [0; 1400] ergibt, dass die Kosten am geringsten werden, wenn P etwa 510 m von der Straßenecke A entfernt ist. (1) Dann betragen sie nur 47247,45 €, also etwas weniger (252,55 €), als wenn komplett entlang der Straße verlegt wird.



(exakte Berechnung über die Nullstelle der Ableitungsfunktion ergibt

$x_0 = \frac{625}{3}\sqrt{6} \approx 510{,}31036307983$ $\quad k(x_0) = 5000\sqrt{6} + 35000 \approx 47247{,}448713916$)