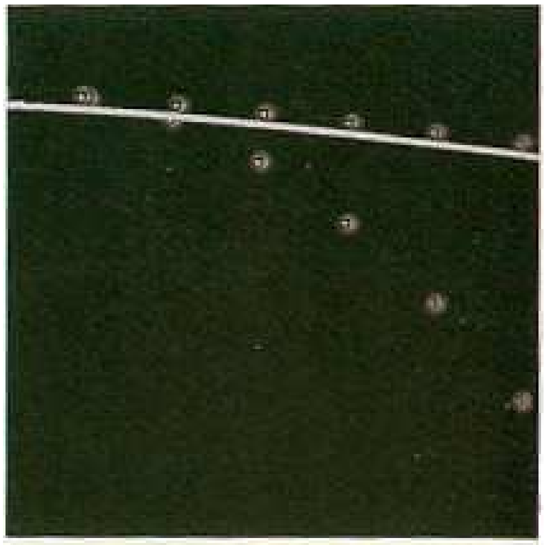
Der waagerechte Wurf

1. Erkundungen zum waagerechten Wurf:

1.1. Dartpfeilwurf auf fallende Zielscheibe
Betrachten Sie das spannende Experiment, das unter der Webadresse
https://www.leifiphysik.de/mechanik/waagerechter-und-schraeger-wurf/versuche/dartpfeil
erklärt und auch auf dem YouTube-Video https://youtu.be/PdXC6burYUU gezeigt wird.

1.2. Stroboskopaufnahmen fallender Kugeln
Die beiden folgenden Bilder zeigen Aufnahmen fallender Kugeln. Sie sind mit einer schnell im Wechsel ein- und ausgeschalteten Lampe (Stroboskop) beleuchtet.

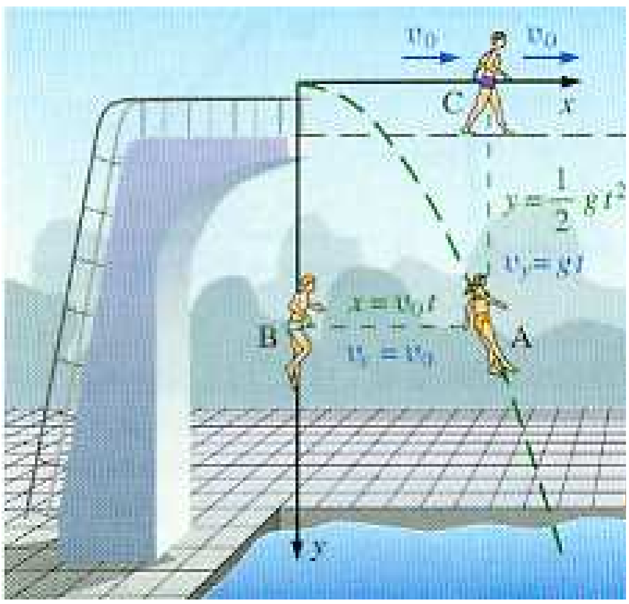
Stroboskopaufnahmen von freiem Fall und waagrechten Wurf



Die Rollbahn der Kugel ist leicht geneigt, um den Rollwiderstand auszugleichen.

... gleichförmiger horizontaler Bewegung und waagrechtem Wurf

Die Experimente belegen:
Ein waagerechter Wurf erfolgt in horizontaler Richtung wie eine gleichförmige Bewegung mit der Abwurfgeschwindigkeit.
In vertikaler Richtung erfolgt einfach ein freier Fall.



Der waagrechte Wurf ist eine Überlagerung einer gleichförmigen horizontalen Bewegung mit einem freien Fall.

Sie brauchen also keine völlig neuen Bewegungsgleichungen kennen zu lernen. Sondern können die bekannten Gleichungen betrachten. Sie müssen allerdings die waagrechte und die senkrechte Komponente der Bewegung trennen.

2. <u>Bewegungsgleichungen zum waagerechten Wurf:</u>

$\vec{s}, s_x, s_y, x, y$: Ort — h : Abwurfhöhe

$\vec{v}, v_x, v_y$: Geschwindigkeit — v_0 : Abwurfgeschwindigkeit

$\vec{a}, a_x, a_y$: Beschleunigung — x_W : Wurfweite

$$\boxed{\begin{array}{lll} s_x = x = v_0 t & v_x = v_0 & a_x = 0 \\ s_y = y = h - \frac{1}{2} g t^2 & v_y = -gt & a_y = -g \end{array}}$$

Man schreibt dies auch als Vektor mir zwei Komponenten:

$$\vec{s} = \begin{pmatrix} s_x \\ s_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_0 t \\ h - \frac{1}{2} g t^2 \end{pmatrix} \qquad \vec{v} = \begin{pmatrix} v_0 \\ -gt \end{pmatrix} \qquad \vec{a} = \begin{pmatrix} 0 \\ -g \end{pmatrix}$$

3. <u>Babgeleitete Formeln zum waagerechten Wurf:</u>

Wurfparabel: $y = h - \frac{g}{2v_0^2} x^2$ $\qquad x_W = \sqrt{\frac{2h}{g}} \cdot v_0$ $\qquad$ Wurfdauer: $t_W = \sqrt{\frac{2h}{g}}$

4. <u>Simulationen zum waagerechten Wurf:</u>

Unter dem folgenden Link können und sollen Sie verschiedene waagerechte Würfe simulieren.
https://www.leifiphysik.de/mechanik/waagerechter-und-schraeger-wurf/versuche/waagerechter-wurf-simulation
Untersuchen Sie insbesondere (qualitativ und quantitaiv), wie die Wurfweite von der Abwurfhöhe und der Abwurfgeschwindigkeit abhängt. (Vergrößern Sie diese Ausgangsgrößen systematisch, verdoppeln, verdreifachen, vervierfachen…)

Ergebnisse:
Wenn die Abwurfgeschwindigkeit verdoppelt wird, ________________ sich die Wurfweite.
Um die Wurfweite zu verdoppeln, braucht man die____________________ Abwurfhöhe.

Die Wurfweite ist ______________________ zur Abwurfgeschwindigkeit
und zur _______________ der Abwurfhöhe.

5. <u>Musteraufgabe (siehe Folgeseite)</u>

Bearbeiten Sie diese Aufgabe so, wie Sie es sich selber zutrauen.
Sie können es komplett alleine versuchen und erst am Ende die Musterlösung zur Kontrolle verwenden, sofort die Lösung durchlesen oder einen Zwischenweg verwenden.
In der Musterlösung werden die Formeln aus 3. hergeleitet; diese Herleitungen sollten Sie in jedem Fall studieren.

6. Lösen Sie die <u>Aufgaben 1 bis 6</u>. (auf der Folgeseite).
   Scannen Sie Ihre Lösungen ein oder fotografieren Sie sie und schicken Sie mir das bis spätestens **<u>Dienstag, 31.3.2020 um 15 Uhr</u>** an vh.aesmtk@t-online.de.

Musteraufgabe

Ein Ball wird waagrecht mit der Geschwindigkeit $v_0 = 6{,}00$ m/s horizontal aus der Höhe $h = 1{,}80$ m abgeworfen.

a) Wie lange dauert es, bis er auf dem Boden aufkommt?
b) Wie weit ist er bis dahin geflogen?
c) Wo befindet sich der Ball nach 0,400 s ?
d) In 3 Meter horizontaler Entfernung vom Abwurfpunkt befindet sich ein 50 cm hohes Hindernis. Fliegt der Ball darüber hinweg?
e) Mit welcher Geschwindigkeit trifft der Ball auf dem Boden auf?
f) Unter welchem Winkel trifft der Ball den Boden?

Bei allen Aufgaben soll die Reibung (insbesondere der Luftwiderstand) vernachlässigt werden. (Rechne die ersten beiden Aufgaben mit g = 10 m/s², sonst mit 9,81 m/s²)

Aufgabe 1: Berechne $x(t)$ und $y(t)$ der waagrechten Würfe für

a) $v_0 = 5$ m/s b) $v_0 = 10$ m/s

nach $t = 0{,}1$ s ; 0,5 s ; 1,0 s ; 1,5 s ; 2,0 s.

Zeichne anschließend die Bahnkurven (im Maßstab 1:200) und (außer für $t = 0{,}1$ s) die Geschwindigkeitsvektoren ein (1 cm entspreche 5 m/s).

Aufgabe 2: Wie weit fliegt eine Gewehrkugel, die aus Schulterhöhe (1,50 Meter) mit 900 km/h abgefeuert wird?

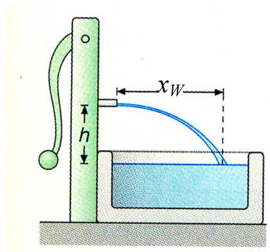
Aufgabe 3: Ein Stein wird mit der Geschwindigkeit $v_0 = 20$ m/s horizontal von der Höhe h aus abgeworfen. Er fliegt $x_W = 40$ m weit.

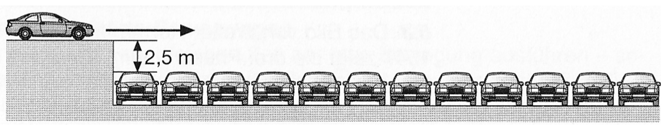
a) Wie groß sind Abwurfhöhe und Flugzeit?
b) Mit welcher Geschwindigkeit und mit welchem Winkel zur Horizontalen trifft der Stein auf den Boden?

Aufgabe 4:

Der Wasserstrahl eines Brunnens tritt 60 cm über der Wasseroberfläche horizontal aus und trifft in der horizontalen Entfernung $x_W = 1{,}1$ m auf.

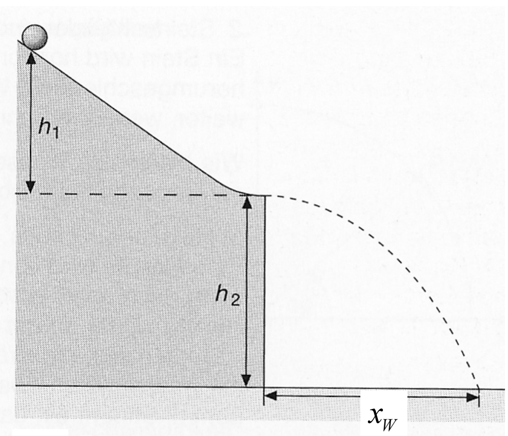
a) Mit welcher Geschwindigkeit verlässt der Strahl das Brunnenrohr?
b) Mit welcher Geschwindigkeit und unter welchem Winkel trifft der Strahl auf die Wasseroberfläche?





Aufgabe 5: „Helldrivers“

Ein Helldriver will mit seinem Auto über 12 andere Autos springen. Die Autos stehen dicht an dicht nebeneinander geparkt, ein Auto ist 1,80 Meter breit. Der Absprung erfolgt 2,50 Meter über den Dächern der Autos. Berechne die hierfür nötige Anfangsgeschwindigkeit.



Die Galilei’sche Sprungschanze

Aufgabe 6: „Galileische Sprungschanze“

Eine Kugel rollt eine schiefe Ebene der Höhe h_1 herunter. Anschließend rollt sie ein kurzes Stück waagrecht, um dann eine Sprungschanze, die die Höhe h_2 hat, hinunter zu fliegen. Berechne die Wurfweite x_W in Abhängigkeit von h_1 und h_2 (unter Vernachlässigung der Rotationsbewegung der Kugel).

Lösung der Musteraufgabe

Ein Ball wird waagrecht mit der Geschwindigkeit $v_0 = 6{,}00$ m/s horizontal aus der Höhe $h = 1{,}80$ m abgeworfen.

a) Wie lange dauert es, bis er auf dem Boden aufkommt?

Wie die Experimente gezeigt haben, dauert dies genau so lange wie bei einem freien Fall aus dieser Höhe. Also gilt $h = \frac{1}{2}gt^2 \quad \Leftrightarrow \quad t = \sqrt{\frac{2h}{g}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 1{,}8\,\mathrm{m}}{9{,}81\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}}} = 0{,}60578\ldots\ \mathrm{s} \approx 0{,}606\ \mathrm{s}$.

Damit ist auch die Formel für die Wurfdauer (also die Zeitspanne vom Abwurf bis zum Auftreffen auf den Boden) hergeleitet $t_W = \sqrt{\frac{2h}{g}}$. Hier ist $t_W \approx 0{,}606$ s.

b) Wie weit ist er bis dahin geflogen?

Während der Dauer des Wurfes vollführt der Ball in horizontaler Richtung eine Bewegung mit der Geschwindigkeit v_0. Also legt er in dieser Zeit die Strecke $x_W = v_0 \cdot t_W$ zurück.

Einsetzen der Formel für die Wurfdauer führt auf die Formel $x_W = \sqrt{\frac{2h}{g}} \cdot v_0$ für die Wurfweite.

Für den Ball ist $x_W = v_0 \cdot t_W = 6{,}00\ \mathrm{m/s} \cdot 0{,}60578\ldots\ \mathrm{s} = 3{,}634695\ \ldots\ \mathrm{m} \approx 3{,}63\ \mathrm{m}$.

c) Wo befindet sich der Ball nach 0,400 s ?

Hierfür muss man, da es sich um eine zweidimensionale Bewegung handelt, sowohl die x- als auch die y-Koordinate angeben, Ursprung des Koordinatensystems ist am Erdboden unterhalb des Abwurfpunktes, die Wurfrichtung ist in positiver x-Richtung.

Gleichförmig in x-Richtung $x = v_0 \cdot t = 6\ \mathrm{m/s} \cdot 0{,}4\ \mathrm{s} = 2{,}4\ \mathrm{m}$.

Freier Fall in y-Richtung: $y = h - \frac{1}{2} g \cdot t^2 = 1{,}8\ \mathrm{m} - 0{,}5 \cdot 9{,}81\ \mathrm{m/s^2} \cdot (0{,}4\ \mathrm{s})^2 = 1{,}0152\ \mathrm{m}$.

Der Ball ist dann 2,4 Meter weit in Wurfrichtung geflogen und befindet sich dann noch etwa 1,015 Meter über dem Erdboden, kurz im Punkt P(2,4 m | 1,015 m).

d) In 3 Meter horizontaler Entfernung vom Abwurfpunkt befindet sich ein 50 cm hohes Hindernis. Fliegt der Ball darüber hinweg?

Hierzu möchte man an einer Stelle x (hier $x = 3\mathrm{m}$) die Höhe y ausrechnen und prüfen, ob sie größer als 50 cm ist. Dazu berechnen wir zunächst aus der gleichförmigen horizontalen Bewegung die Zeit, an der der Ball 3m weit geflogen ist. Diese Zeit kann man dann in die Formel für die Höhe einsetzen.

Horizontale gleichförmige Bewegung: $x = v_0 t \quad \Leftrightarrow \quad t = \frac{x}{v_0} = \frac{3\mathrm{m}}{6\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}} = 0{,}5\ \mathrm{s}$. Zeit einsetzen in

Gleichung für freien Fall: $y = h - \frac{1}{2}gt^2 = h - \frac{1}{2}g\left(\frac{x}{v_0}\right)^2 = h - \frac{1}{2}g\frac{x^2}{v_0^2} = h - \frac{g}{2v_0^2}x^2$.

Damit ist die Gleichung für die Bahnkurve hergeleitet. Es ist die Gleichung einer Parabel, deshalb nennt man sie auch Wurfparabel.

Einsetzen der Werte: :

$y = h - \frac{1}{2} g \cdot t^2 = 1{,}8\ \mathrm{m} - 0{,}5 \cdot 9{,}81\ \mathrm{m/s^2} \cdot (0{,}5\ \mathrm{s})^2 = 0{,}57375\ \mathrm{m} \approx 57{,}4\ \mathrm{cm} > 50\ \mathrm{cm}$.

Der Ball fliegt also gut 7 cm über das Hindernis hinweg.

Das Ergebnis hätte man nach der Herleitung auch direkt mit der Formel für die Wurfparabel erhalten können, ohne im Zwischenschritt die Zeit zu berechnen:

$$y = h - \frac{g}{2v_0^2}x^2 = 1{,}8\mathrm{m} - \frac{9{,}81\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}}{2 \cdot (6\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}})^2} \cdot (3\mathrm{m})^2 = 1{,}8\mathrm{m} - 1{,}22625\mathrm{m} = 0{,}67375\mathrm{m}.$$

e) Mit welcher Geschwindigkeit trifft der Ball auf dem Boden auf?

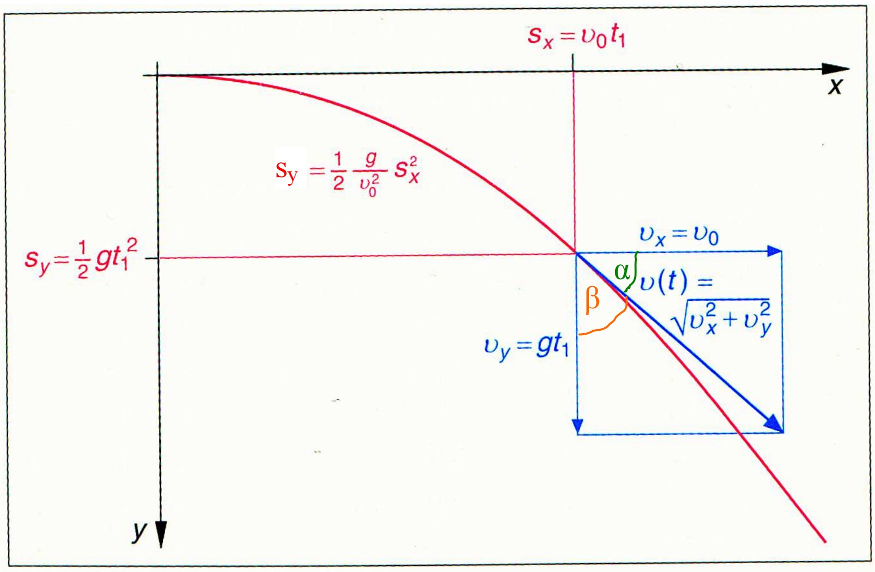
Auch hier muss man, da es sich um eine zweidimensionale Bewegung handelt, sowohl die horizontale als auch die vertikale Komponente der Geschwindigkeit berechnen. Hierbei wird die in a) berechnete Wurfdauer für die Zeit eingesetzt.

Horizontal: gleichförmige Bewegung $v_x = v_0 = 6$ m/s

Vertikal: freier Fall $v_y = -g \cdot t = -9{,}81\ \text{m/s}^2 \cdot 0{,}605783\ldots\ \text{s} = -5{,}94273\ldots\ \text{m/s} = -5{,}94\ \text{m/s}$.

Wie die Abbildung unten zeigt, bilden v_x und v_y mit dem Geschwindigkeitsvektor ein rechtwinkliges Dreieck. Die Länge des Geschwindigkeitsvektors (und daher der Betrag der Geschwindigkeit) muss nun mit dem Satz des Pythagoras ausgerechnet werden:

$$v = |\vec{v}| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{v_0^2 + (gt)^2} = \sqrt{\left(6\frac{\text{m}}{\text{s}}\right)^2 + \left(5{,}9427\ldots\frac{\text{m}}{\text{s}}\right)^2} = 8{,}44488\ldots\ \text{m/s} \approx 8{,}44\ \text{m/s}.$$



30.2 Zur Analyse der Wurfparabel. Die Geschwindigkeiten in *x*-Richtung und in *y*-Richtung werden vektoriell addiert. Der Geschwindigkeitsvektor setzt tangential zur Bahnkurve an.

f) Unter welchem Winkel trifft der Ball den Boden?

Aus der Abbildung liest man ab: $\tan(\alpha) = \frac{|v_y|}{v_x} = \frac{gt}{v_0} = \frac{5{,}9472\ldots\frac{\text{m}}{\text{s}}}{6\frac{\text{m}}{\text{s}}} = 0{,}99045\ldots$

Also beträgt der Winkel $\alpha = 44{,}7252\ldots° \approx 44{,}7°$.