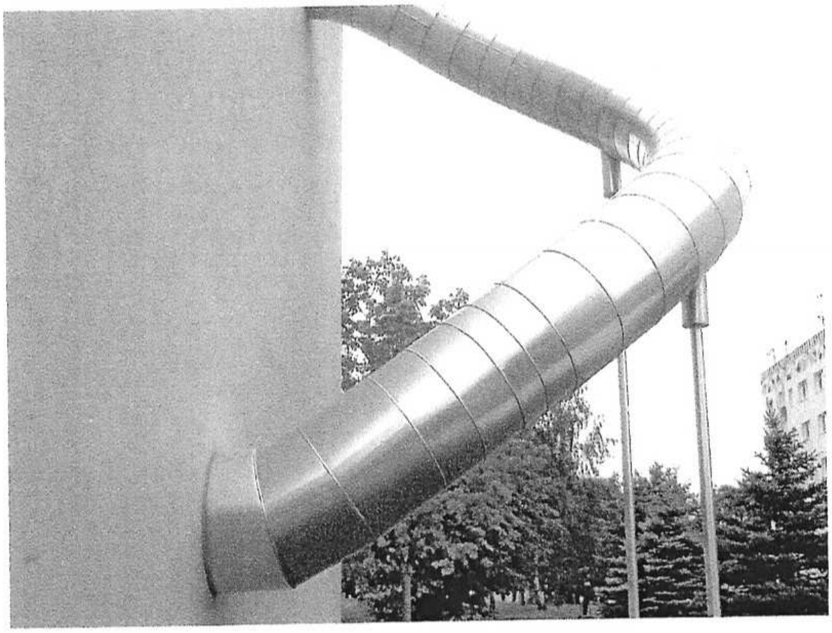
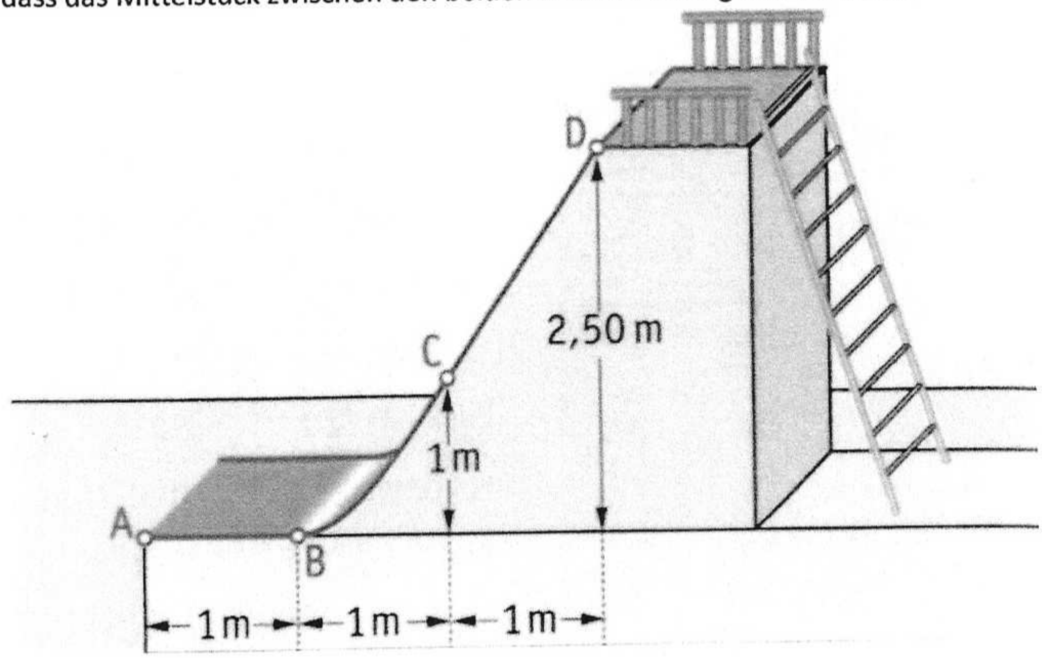
(1.)



(2.)

Rekonstruktion einer Wasserrutsche

Die Rutsche in ein Schwimmbecken soll aus drei Elementen hergestellt werden. Das erste Blechteil, das in das Becken mündet, ist waagerecht und eben, das Dritte, von C nach D, ist auch eben und wurde mit einer Steigung von 150 % montiert. Beim Aufbau der Rutsche zeigte sich jedoch, dass das Mittelstück zwischen den beiden Blechen nicht geliefert wurde.



Gesucht ist eine Funktion, mit der ein gebogenes Teil erstellt werden kann, das knickfrei zwischen den beiden vorhandenen Blechen montiert werden kann.

Ursprung des Koordinatensystems bei B festlegen, 1 Einheit entspricht 1m

Punkt B:	$f(0) = 0$
Horizontal in B:	$f'(0)=0$
Punkt C:	$f(1)=1$
Steigung 150% in C:	$f'(1)=1{,}5$

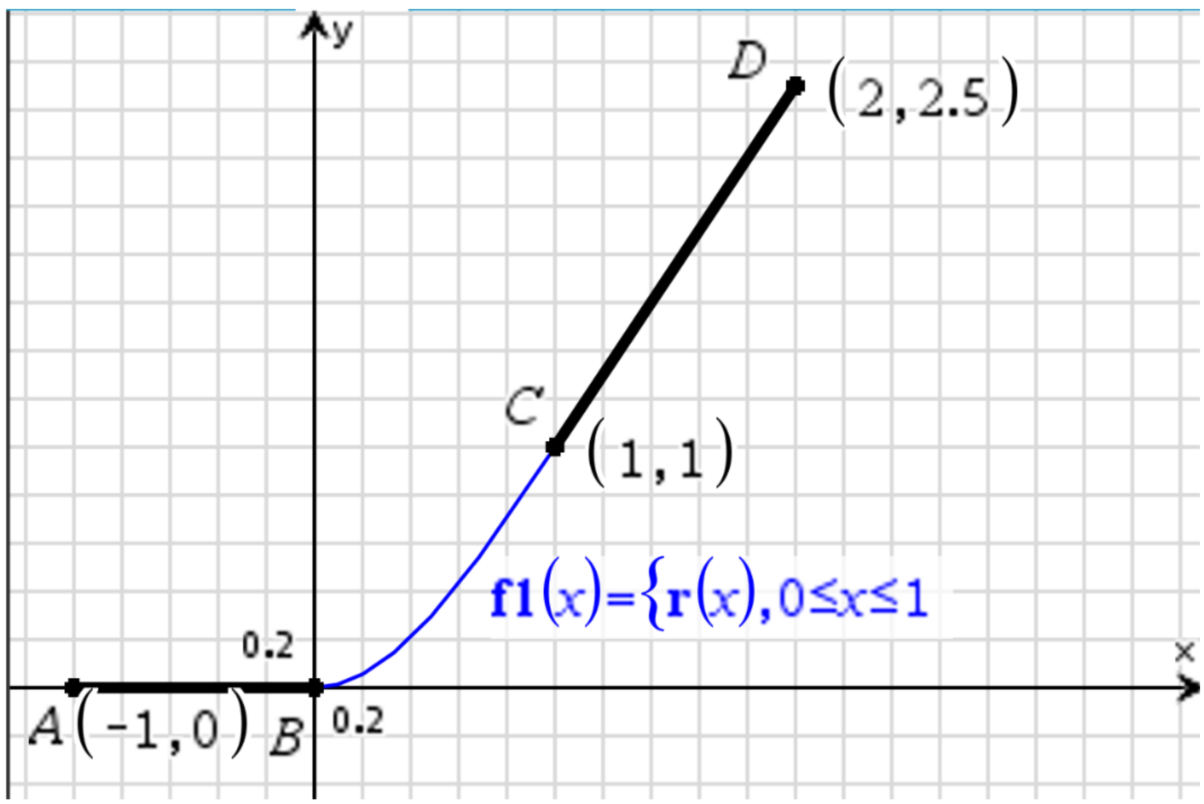
Versuch Parabel durch B und C. $f(x) = 1{,}5x^2$,
dann ist aber $f'(1) = 3 = 300\%$

Ansatz grF 3. Grades $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$
$f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$

$f(0) = 0$	$d = 0$		
$f'(0) = 0$	$c = 0$		
$f(1) = 1$	$a + b + c + d = 1$	$a + b = 1$	I
$f'(1) = 1{,}5$	$3a + 2b + c = 1{,}5$	$3a + 2b = 1{,}5$	II

II – 2*I $a = -0{,}5$ $b = 1 - a = 1{,}5$

$$f(x) = -\frac{1}{2}x^3 + \frac{3}{2}x^2$$



Wenn Ursprung des Koordinatensystems bei A festlegen, 1 Einheit entspricht 1m

Punkt B(1| 0):	f(1) = 0
Horizontal in B:	f'(1)=0
Punkt C(2 | 1):	f(2)=1
Steigung 150% in C:	f'(2)=1,5

Ansatz grF 3. Grades $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$
$f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$

f(1) = 0	$a + b + c + d = 1$
f'(1) = 0	$3a + 2b + c = 0$
f(2) = 1	$8a + 4b + 2c + d = 1$
f'(2) = 1,5	$12a + 4b + c = 1{,}5$

Lösung mit CAS $a = -\frac{1}{2}$, $b = 3$, $c = -\frac{9}{2}$, $d = 2$

$$f(x) = -\frac{1}{2}x^3 + 3x^2 - \frac{9}{2}x + 2$$

Interessante andere Lösung:
Potenzfunktion $f(x) = (x-1)^{1,5} = \sqrt{(x-1)^3}$

Aber nicht 2 Mal stetig differenzierbar in 1, daher „Ruck" dort!
Außerdem Lösung/Ansatz nicht übertragbar, falls Steigung bei C kleiner als 100%, da dann f'(1) für diese Potenzfunktion nicht existiert (Wurzelfunktion)!

Das Beispiel stammt übrigens aus dem Lehrbuch „EdM Einführungsphase" und ist auf den Seiten 252f. mit Lösung ausführlich dargestellt.

Beispiel für eine effektive Lösung mit Hilfe des CAS-Rechners:

1. Definieren Sie die Funktion, die Sie ansetzen und alle benötigten Ableitungsfunktionen.

$f(x):=a\cdot x^3+b\cdot x^2+c\cdot x+d$	*Fertig*
$fs(x):=\frac{d}{dx}(f(x))$	*Fertig*

2. Geben Sie die Bedingungen in funktionaler Form ein. Das CAS verwandelt sie dann automatisch in lineare Gleichungen für die Koeffizienten.

$f(0)=0$	$d=0$
$fs(0)=0$	$c=0$
$f(1)=1$	$a+b+c+d=1$
$fs(1)=\frac{3}{2}$	$3\cdot a+2\cdot b+c=\frac{3}{2}$

3. Lösen Sie das lineare Gleichungssystem. Verbinden Sie die Gleichungen mit „and“ für und (einfach mit den Buchstabentasten eintippen) und geben Sie nach dem Komma alle Koeffizienten an, damit das CAS weiß, dass es nach diesen auflösen soll.

$$\text{solve}\left(f(0)=0 \text{ and } fs(0)=0 \text{ and } f(1)=1 \text{ and } fs(1)=\frac{3}{2},\{a,b,c,d\}\right)$$

$$a=\frac{-1}{2} \text{ and } b=\frac{3}{2} \text{ and } c=0 \text{ and } d=0$$

4. Definieren Sie eine neue Funktion mit Hilfe des „with-Operators“. Dieses „|“-Zeichen finden Sie durch ctrl = im Auswahlmenu rechts unten. Tippen Sie dahinter „ans“ ein, so dass das CAS automatisch die Lösung des LGS einsetzt. Mit der so definierten Funktion können Sie dann weiter arbeiten, sie zum Beispiel zur Kontrolle zeichnen lassen oder Anschlussfragen beantworten.

$r(x):=f(x)\vert a=\frac{-1}{2} \text{ and } b=\frac{3}{2} \text{ and } c=0 \text{ and } d=0$	*Fertig*
$r(x)$	$\frac{3\cdot x^2}{2}-\frac{x^3}{2}$