Notwendige und Hinreichende Bedingungen für Extrem- und Wendestellen

Aufgabe 1: Nennen und erläutern Sie ein Beispiel einer Funktion f und einer Stelle x_0 ihres Definitionsbereiches, so dass die notwendige Bedingung für eine Extremstelle $f'(x_0) = 0$ erfüllt ist. aber in x_0 keine Extremstelle vorliegt.

Aufgabe 2: a) Erläutern Sie ein Beispiele einer ganzrationalen Funktion f , die auf ganz $\mathbb{R}$ streng monoton fallend ist, für die aber nicht $f'(x) < 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt.
*b) Finden Sie ein Beispiel einer auf ganz $\mathbb{R}$ streng monoton fallenden Funktion, für die sogar an drei Stellen $f'(x_1) = f'(x_2) = f'(x_3) = 0$ gilt.
[Hinweis: Finden Sie eine Funktion, deren erste Ableitungsfunktion drei doppelte Nullstellen hat!]

Aufgabe 3: Zeigen Sie am Beispiel der Funktion $f(x) = -x^4$, dass die hinreichende Bedingung $f'(x_0) = 0$ und $f''(x_0) < 0$ nicht notwendig für eine Maximalstelle x_0 ist.

Aufgabe 4: Nennen und erläutern Sie je ein Beispiel einer ganzrationalen Funktion f und einer Stelle x_0 ihres Definitionsbereiches, so dass $f'(x_0) = 0$ und $f''(x_0) = 0$ gilt und …

a) ... x_0 eine Sattelstelle ist.
b) ... x_0 eine Minimalstelle ist.
c) ... x_0 eine Maximalstelle ist.

Aufgabe 5: Nennen und erläutern Sie ein Beispiel einer nicht konstanten ganzrationalen Funktion f und einer Stelle x_0 ihres Definitionsbereiches, so dass die notwendige Bedingung für eine Wendestelle $f''(x_0) = 0$ erfüllt ist. aber in x_0 keine Wendestelle vorliegt.

Aufgabe 6: Nennen und erläutern Sie ein Beispiel ganzrationalen Funktion f und einer Stelle x_0 , dass die hinreichende Bedingung $f''(x_0) = 0$ und $f'''(x_0) \neq 0$ nicht notwendig für eine Wendestelle x_0 ist.

Aufgabe 7: Nennen und erläutern Sie je ein Beispiel einer ganzrationalen Funktion f und einer Stelle x_0 ihres Definitionsbereiches, so dass $f''(x_0) = 0$ und $f'''(x_0) = 0$ gilt und …

a) ... x_0 eine Minimalstelle ist.
b) ... x_0 eine Maximalstelle ist.
c) ... x_0 eine Wendestelle ist.
d) ... x_0 weder eine Wende- noch eine Extremstelle ist.

Aufgabe 8: a) Finden Sie ein Beispiel einer ganzrationalen Funktion f , so dass ihr Funktionswert und die ersten vier Ableitungen an der Stelle 0 alle verschwinden (also $f(0) = f'(0) = f''(0) = f'''(0) = f^{(4)}(0) = 0$ gilt), aber die fünfte Ableitung dort von 0 verschieden ist, also $f^{(5)}(0) \neq 0$. Welche Art von Stelle liegt dann bei 0 vor?
b) Finden Sie Beispiele für n > 4, so dass
d.h. $f(0) = f'(0) = f''(0) = ... = f^{(n)}(0) = 0$, aber $f^{(n+1)}(0) \neq 0$ gilt und
i. 0 eine Minimalstelle ii. 0 eine Maximalstelle ist.
Stellen Sie eine Hypothese für den Zusammenhang zwischen n und der Art der Stelle bei null auf!

Notwendige und Hinreichende Bedingungen für Extrem- und Wendestellen

Aufgabe 1: Nennen und erläutern Sie ein Beispiel einer Funktion f und einer Stelle x_0 ihres Definitionsbereiches, so dass die notwendige Bedingung für eine Extremstelle $f'(x_0) = 0$ erfüllt ist. aber in x_0 keine Extremstelle vorliegt.

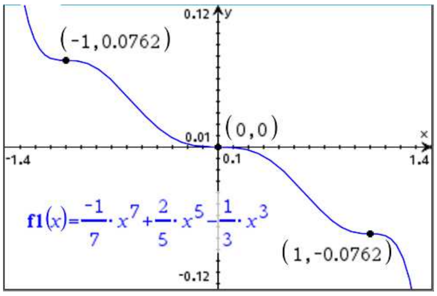
Wenn die notwendige Bedingung erfüllt ist, kann x_0 auch eine Sattelstelle sein.
Beispiel: $f(x) = x^3$ und $x_0 = 0$ Dann ist $f'(x) = 3x^2$ und $f'(0) = 3 \cdot 0^2 = 0$.
Aber 0 ist keine Extremstelle, da $f(-a) = -a^3 < 0 = f(0)$ und $f(a) = a^3 > 0 = f(0)$ für jede (noch so kleine) positive reelle Zahl ist. Also gibt es in jeder Umgebung der Stelle 0 sowohl kleinere als auch größere Funktionswerte und somit ist 0 weder Minimal- noch Maximalstelle.

Aufgabe 2: a) Erläutern Sie ein Beispiele einer ganzrationalen Funktion f , die auf ganz $\mathbb{R}$ streng monoton fallend ist, für die aber nicht $f'(x) < 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt.

Beispiel: $f(x) = -x^3$ ist streng monoton fallend auf ganz $\mathbb{R}$.
Denn wenn $a < b$ ist auch $a^3 < b^3$ und daher $f(a) = -a^3 > -b^3 = f(b)$.
Aber es ist $f'(0) = -3 \cdot 0^2 = 0$.

*b) Finden Sie ein Beispiel einer auf ganz $\mathbb{R}$ streng monoton fallenden Funktion, für die sogar an drei Stellen $f'(x_1) = f'(x_2) = f'(x_3) = 0$ gilt. [Hinweis: Finden Sie eine Funktion, deren erste Ableitungsfunktion drei doppelte Nullstellen hat!]

Eine Funktion mit der Ableitung $f'(x) = -(x-1)^2 x^2 (x+1)^2$ ist streng monoton fallend und hat drei Sattelstellen bei $x_1 = -1$, $x_2 = 0$ und $x_3 = 1$.



Es ist $f'(x) = -x^2[(x-1)(x+1)]^2 = -x^2(x^2-1)^2$
$= -x^2(x^4 - 2x^2 + 1)$
$= -x^6 + 2x^4 - x^2$.
Eine Funktion, die diese Ableitung hat, ist z.B.
$$f(x) = -\frac{1}{7}x^7 + \frac{2}{5}x^5 - \frac{1}{3}x^3 .$$

Aufgabe 3: Zeigen Sie am Beispiel der Funktion $f(x) = -x^4$, dass die hinreichende Bedingung $f'(x_0) = 0$ und $f''(x_0) < 0$ nicht notwendig für eine Maximalstelle x_0 ist.

Wegen $x^4 = (x \cdot x) \cdot (x \cdot x) > 0$ für alle reellen Zahlen $x \neq 0$ ist $f(x) = -x^4 < 0 = f(0)$ für alle $x \neq 0$ und daher $x_0 = 0$ (sogar strikte globale) Maximalstelle. Es ist $f'(x) = -4x^3$ und $f''(x) = -12x^2$ und daher zwar $f'(x_0) = f'(0) = 0$, aber eben auch $f''(x_0) = f''(0) = 0$, so dass die zweite Forderung der hinreichenden Bedingung nicht erfüllt ist. Diese ist also nicht notwendig.
Notwendig ist (für zwei Mal stetig differenzierbare Funktionen) lediglich $f'(x_0) = 0$ und $f''(x_0) \leq 0$. Denn falls $f'(x_0) = 0$ und $f''(x_0) > 0$ läge ja eine Minimalstelle vor.

Aufgabe 4: Nennen und erläutern Sie je ein Beispiel einer ganzrationalen Funktion f und einer Stelle x_0 ihres Definitionsbereiches, so dass $f'(x_0) = 0$ und $f''(x_0) = 0$ gilt und …

a) ... x_0 eine Sattelstelle ist.
b) ... x_0 eine Minimalstelle ist.
c) ... x_0 eine Maximalstelle ist.

a) $f(x) = x^3$ und $x_0 = 0$, siehe Aufgabe 1.

b) $f(x) = x^4$ und $x_0 = 0$. Denn wegen $f(x) = x^4 = (x \cdot x) \cdot (x \cdot x) > 0 = f(0)$ für alle reellen Zahlen $x \neq 0$ ist $x_0 = 0$ (sogar strikte globale) Minimalstelle. Es ist $f'(x) = 4x^3$ und $f''(x) = 12x^2$ und daher $f'(x_0) = f'(0) = 0$ und $f''(x_0) = f''(0) = 0$. Analog zu Aufgabe 3 ist die zweite Forderung der hinreichenden Bedingung nicht erfüllt. Diese ist also nicht notwendig.

Notwendig ist für eine Minimalstelle zwei Mal stetig differenzierbare Funktionen lediglich $f'(x_0) = 0$ und $f''(x_0) \geq 0$. Denn falls $f'(x_0) = 0$ und $f''^{(x_0)} < 0$ läge ja eine Maximalstelle vor.

c) $f(x) = -x^4$ und $x_0 = 0$, siehe Aufgabe 3.

Aufgabe 5: Nennen und erläutern Sie ein Beispiel einer nicht konstanten ganzrationalen Funktion f und einer Stelle x_0 ihres Definitionsbereiches, so dass die notwendige Bedingung für eine Wendestelle $f''(x_0) = 0$ erfüllt ist. aber in x_0 keine Wendestelle vorliegt.

$f(x) = x^4$ und $x_0 = 0$. Es ist $f'(x) = 4x^3$ und $f''(x) = 12x^2$ und daher $f''(x_0) = f''(0) = 0$. Da aber $f''(x) = 12x^2 > 0$ für alle reellen Zahlen $x \neq 0$ gilt, ist der Graph der Funktion in allen Punkten außer dem Ursprung linksgekrümmt. Daher liegt bei $x_0 = 0$ keine Wendestelle vor. Das Gegenbeispiel zeigt, dass die notwendige Bedingung nicht hinreichend ist.

Wie das Beispiel aus Aufgabe 7d) zeigt, muss $f''(x_0) = 0$ auch nicht zu einer Extremstelle führen, wenn keine Wendestelle vorliegt. Es kann einfach auch nur ein „sehr gerader“ Verlauf des Graphen vorliegen.

Aufgabe 6: Nennen und erläutern Sie ein Beispiel ganzrationalen Funktion f und einer Stelle x_0, dass die hinreichende Bedingung $f''(x_0) = 0$ und $f'''(x_0) \neq 0$ nicht notwendig für eine Wendestelle x_0 ist.

$f(x) = x^5$ und $x_0 = 0$. Es ist $f'(x) = 5x^4$, $f''(x) = 20x^3$ und $f'''(x) = 60x^2$. Damit ist $f''(x_0) = f''(0) = 20 \cdot 0^3 = 0$. Da $f''(x) = 20x^2 \cdot x < 0$ für alle negativen reellen Zahlen $x < 0$ gilt, ist der Graph der Funktion im dritten Quadranten rechtsgekrümmt. Außerdem ist $f''(x) = 20x^2 \cdot x > 0$ für alle positiven reellen Zahlen $x > 0$ und somit der Graph im ersten Quadranten linksgekrümmt. Daher liegt bei $x_0 = 0$ eine Wendestelle vor. Allerdings ist $f'''(x_0) = f'''(0) = 60 \cdot 0^2 = 0$ und daher die zweite Aussage der hinreichenden Bedingung nicht erfüllt, Dieses Gegenbeispiel zeigt also, dass die notwendige Bedingung nicht hinreichend ist.

Das Gegenbeispiel lässt sich leicht auf $f(x) = ax^5 + bx$ verallgemeinern. Es gibt somit auch Gegenbeispiele mit links-rechts-Wendestellen (für $a < 0$), und mit Wendestellen, die keine Sattelstellen sind, da ja $f'(x) = ax^4 + b$ und daher $f'(0) = b$ nicht null sein muss.

Aufgabe 7: Nennen und erläutern Sie je ein Beispiel einer ganzrationalen Funktion f und einer Stelle x_0 ihres Definitionsbereiches, so dass $f''(x_0) = 0$ und $f'''(x_0) = 0$ gilt und …

a) ... x_0 eine Minimalstelle ist.
b) ... x_0 eine Maximalstelle ist.
c) ... x_0 eine Wendestelle ist.
d) ... x_0 weder eine Wende- noch eine Extremstelle ist.

a) $f(x) = x^4$ und $x_0 = 0$. Wie in Aufgabe 4b) gezeigt ist $x_0 = 0$ Minimalstelle, Ferner ist $f''(x) = 12x^2$ und $f'''(x) = 24x$ und daher $f''(0) = f'''(0) = 0$.

b) $f(x) = -x^4$ und $x_0 = 0$. Wie in Aufgabe 3) gezeigt ist $x_0 = 0$ Maximalstelle, Ferner ist $f''(x) = -12x^2$ und $f'''(x) = -24x$ und daher $f''(0) = f'''(0) = 0$.

c) $f(x) = ax^5 + bx$ für $a \neq 0$ und beliebige reelle Zahlen b, siehe Aufgabe 6).

d) Zum Beispiel $f(x) = \frac{1}{4}x^4 - x$ und $x_0 = 0$. Dann ist $f'(x) = x^3 - 1$ und daher die notwendige Bedingung für eine Extremstelle $f'(x) = 0$ nur für $x = 1$ erfüllt. (T(1 | – ¾) ist einziger Extrempunkt.) Daher ist $x_0 = 0$ keine Extremstelle. Außerdem ist $f''(x) = 3x^2 < 0$ für $x \neq 0$, so dass der Graph sowohl für positive also auch für negative Abszissen linksgekrümmt ist und bei keine Wendestelle vorliegt. Aber es ist $f''(0) = 0$ und mit $f'''(x) = 6x$ auch $f'''(0) = 0$.

Aufgabe 8: a) Finden Sie ein Beispiel einer ganzrationalen Funktion f , so dass ihr Funktionswert und die ersten vier Ableitungen an der Stelle 0 alle verschwinden (also $f(0) = f'(0) = f''(0) = f'''(0) = f^{(4)}(0) = 0$ gilt), aber die fünfte Ableitung dort von 0 verschieden ist, also $f^{(5)}(0) \neq 0$. Welche Art von Stelle liegt dann bei 0 vor?

$f(x) = x^5$ erfüllt dies und hat bei 0 dann eine Sattelstelle.

b) Finden Sie Beispiele für n > 4, so dass d.h. $f(0) = f'(0) = f''(0) = ... = f^{(n)}(0) = 0$, aber $f^{(n+1)}(0) \neq 0$ gilt und
i. 0 eine Minimalstelle ii. 0 eine Maximalstelle ist.
Stellen Sie eine Hypothese für den Zusammenhang zwischen n und der Art der Stelle bei null auf!

i. Für $f(x) = x^6$ sind die ersten fünf Ableitungen bei 0 gleich Null, da so lange noch ein Faktor „x“ erhalten bleibt. Erst die sechste Ableitung wird eine konstante Funktion $f^{(6)}(x) = 6! = 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 720$ und daher ist ihr Wert auch an der Stelle 0 von null verschieden. Bei 0 liegt eine Maximalstelle vor.
ii. Analog $f(x) = -x^6$.

Die Beispiele führen auf folgende (richtige!) Hypothese:
Sind bei einer Funktion die ersten n Ableitungen an einer Stelle allesamt gleich null und dann die n+1. Ableitung (erstmals) von Null verschieden, so liegt an dieser Stelle

a) Eine Sattelstelle vor, wenn n gerade ist
b) Eine Extremstelle vor, wenn n ungerade ist. Hierbei handelt es sich dann um eine Maximalstelle, wenn der Wert der n+1. Ableitung negativ ist, und um eine Minimalstelle, falls er positiv ist.