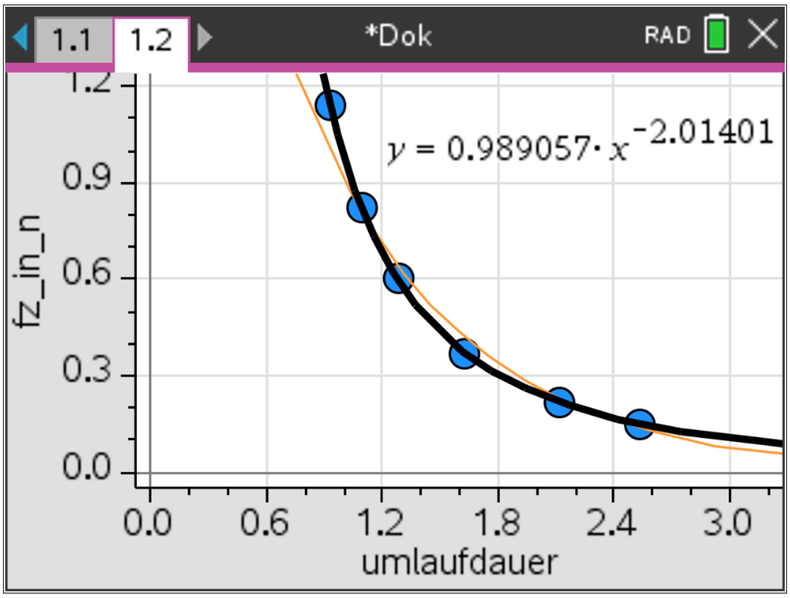
Aufträge 4 und *5 - Auswertung des Zentralkraft-Versuchs

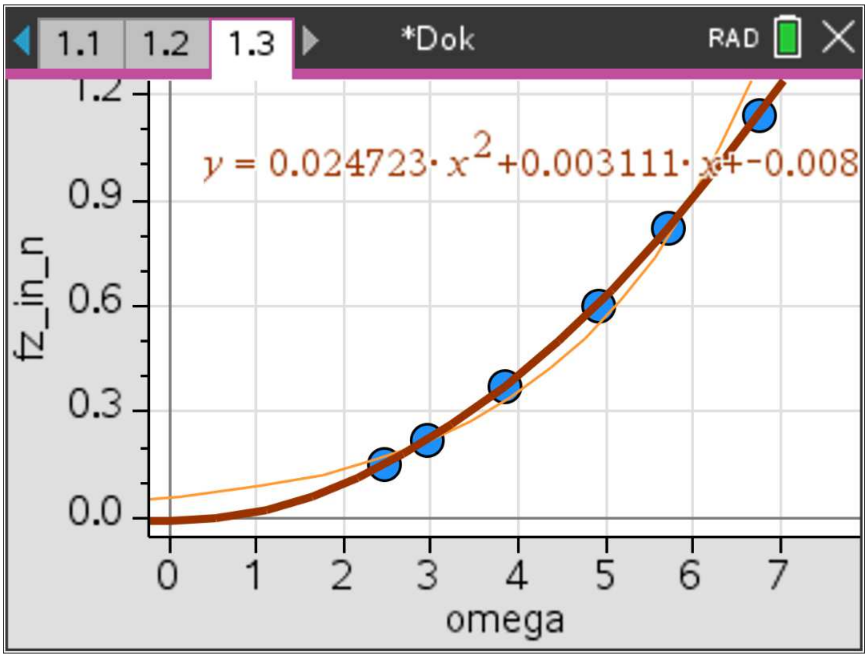


A)

4a) T-F_z-Diagramm mit exponentieller Regression (orange) und- besser passend – Potenz-Regression (schwarz) – führt auf Vermutung, dass F_z proportional zu $T^{-2} = 1/T^2$ ist.

	A t_für_10	B omega	C umlau...	D fz_in_n	E	F	G
=		=20*π/a[]	=a[]/10	=round(h[	=c[]*d[]	=c[]^2*d[]	
1	25.4	2.4737	2.54	0.15	0.381	0.96774	
2	21.2	2.96377	2.12	0.22	0.4664	0.988768	
3	16.3	3.85471	1.63	0.37	0.6031	0.983053	
4	12.8	4.90874	1.28	0.6	0.768	0.98304	
5	11.	5.71199	1.1	0.82	0.902	0.9922	
6	9.3	6.75611	0.93	1.14	1.0602	0.985986	

4b) Spalte E zeigt, dasss F_z nicht antiproportional zu T ist, da keine Produktgleichheit gilt. Allerdings ist $T^2 \cdot F_z$ konstant, nämlich ungefähr gleich 0,98 bis 0,99 (wie der Koeffizient bei der Potenzregression oben)



4c) ω -F_z-Diagramm mit exponentieller Regression (orange) und- besser passend – quadratischer Regression (braun) – führt auf Vermutung, dass F_z proportional zu ω^2 ist. (Potenz-Regression passt ebenso gut, liefert $y = 0{,}0244 \cdot x^{2{,}014}$

	A t_für_10	B omega	C um...	D fz_in_n	E	F	G
=		=20*π/a[]	=a[]/1(	=round(h[	=d[]/b[]	=d[]/b[]^2	=d[]/(0.1*0.25*b[]^2)
1	25.4	2.4737	2.54	0.15	0.060638	0.024513	0.980526
2	21.2	2.96377	2.12	0.22	0.07423	0.025046	1.00183
3	16.3	3.85471	1.63	0.37	0.095986	0.024901	0.996041
4	12.8	4.90874	1.28	0.6	0.122231	0.024901	0.996028
5	11.	5.71199	1.1	0.82	0.143558	0.025133	1.00531
6	9.3	6.75611	0.93	1.14	0.168736	0.024975	0.999013

4d) Spalte E zeigt, dass dass F_z nicht proportional zu ω ist, da keine Quotientengleichheit gilt.
Allerdings ist F_z/ω^2 konstant, nämlich ungefähr gleich 0,025 (wie der führende Koeffizient bei der quadratischen Regression oben)

Spalte G zeigt die Werte für $f_7 = \frac{F_z}{\omega^2 \cdot r \cdot m}$. Sie liegen alle ganz nahe bei 1 (0,980 bis 1,002).
(Auftrag 5*).

Ergebnis: Die Zentripetalkraft F_z proportional zum Quadrat der Winkelgeschwindigkeit ω^2 beziehungsweise proportional zum Kehrwert des Quadrates $T^{-2} = 1/T^2$ der Umlaufdauer(bei konstanten Radius und Masse).

B) konstante Masse $m = 100{,}0$ g, konstante Umlaufzeit $T = 1{,}28$ s

r in cm	20,0	25,0	30,0	35,0	40,0
F_z in N	0,48	0,60	0,73	0,85	0,97
F_z / r in N/cm	0,024	0,024	0,0243	0,024	0,0242
f_7 (Auftrag 5)*	0,996	0,996	1,010	0,996	1,006

Ergebnis: Da Quotientengleichheit herrscht, ist die Zentripetalkraft F_z proportional zum Radius r. (bei konstanter Umlaufdauer und Masse).

C) konstante Umlaufzeit $T = 1{,}28$ s, fester Radius $r = 25{,}0$ cm

m in g	49,9	100,0	150,1	200,1
F_z in N	0,31	0,60	0,91	1,22
$a_z = F_z / m$ in N/kg = m/s²	0,621	0,600	0,606	0,610
f_7 (Auftrag 5)*	1,031	0,996	1,006	1,012

Ergebnis: Da Quotientengleichheit herrscht, ist die Zentripetalkraft F_z proportional zur Masse m. (bei konstanter Umlaufdauer und Radius).
Dies ist wegen des 2. newtonschen Axioms („Kraft = Masse mal Beschleunigung“) auch nicht anders zu erwarten. Der Quotient ist gerade die Zentripetalbeschleunigung a_z.

*(Freiwilliger= Auftrag 7**

Die Formel $F_Z = m\frac{v^2}{r}$ erhält man aus $F_Z = m\omega^2 r$ durch Einsetzen von $\omega = \frac{v}{r}$, Anwendung eines Potenzgesetzes und Kürzen.
Führen Sie diese Ableitung durch!)

$F_Z = m\omega^2 r = m\left(\frac{v}{r}\right)^2 r = m\frac{v^2}{r^2} r = m\frac{v^2}{r^2}$, wobei im letzten Schritt ein „*r*“ gekürzt wurde.

Auftrag 9

Aufgabe 5: Die Fahrgeschwindigkeit desAutos ist genau die Bahngeschwindigkeit des Gummipartikels außen am Reifen. Also wirkt darauf die Zentripetalkraft

$$F_Z = \frac{mv^2}{r} = \frac{0{,}001kg \cdot (25\frac{m}{s})^2}{0{,}36m} = 1{,}74 \text{ N}.$$

Aufgabe 6: Die Masse der Erde musste recherchiert oder der Formelsammlung entnommen werden. Die Winkelgeschwindigkeit entnimmt man der Lösung von Aufgabe 2.
Die Kraft der Sonne auf die Erde ist genau die Zentripetalkraft der Kreisbewegung:

$$F_Z = m\omega^2 r = 5{,}977 \cdot 10^{24} kg \cdot (1{,}991064 \cdot 10^{-7} \frac{1}{\text{s}}.)^2 \cdot 1{,}497 \cdot 10^{11} m = 3{,}55 \cdot 10^{22} \text{ N}$$

Aufgabe 7: a) $F_Z = m\omega^2 r = 75kg\left(\frac{2\pi}{86400s}\right)^2 \cdot 6{,}37 \cdot 10^6 m = 75kg \cdot 0{,}0337\frac{m}{s^2} = 2{,}53\,N$

b) c) Diese Zentripetalkraft wird von der Gravitationskraft der Erde auf den Menschen aufgebracht. Diese beträgt am Äquator etwa $F_G = mg$ = 75 kg · 9,8 m/s² = 735 N., ist also etwa 290 Mal so groß und reicht dazu also aus. Die Kraft, mit der die Person dann auf die Federwaage gedrückt wird, verringert sich aber gerade um die 2,53 N der Zentripetalkraft. (Stellen Sie sich vor, dass die Zentrifugalkraft die Waage „nach oben“ entlastet!) Jede (Feder-)Waage zeigt also nicht die Gravitationskraft, sondern die Differenz aus Gravitationskraft und Zentrifugalkraft an! Der Unterschied ist aber klein und beträgt bei allen Körpern der gleiche Prozentsatz, so dass man das beim Kalibrieren der Waage ausgleichen kann.

d) Da der Bahnradius 0 m beträgt, ist auch $F_Z = m\omega^2 r = 0$ N. Man befindet sich an den Polen direkt auf der Drehachse. Aber natürlich triffft das nur genau für die Körpermitte zu. Für die äußeren Körperteile ist r > 0 m und es wirkt natürlich eine (sehr, sehr) kleine Zentripetalkraft, die die Rotation verursacht.

e) $F_Z = m\omega^2 r' = 75kg \cdot 0{,}0337\frac{m}{s^2} \cdot \cos 50° = 1{,}63\,N.$

*f) Die Zentripetalbeschleunigung am Pol beträgt nur 0,0337 $\frac{m}{s^2}$, der Unterschied der Orstfaktoren ist mit 0,05 $\frac{m}{s^2}$ aber größer. Er lässt sich nicht alleine durch die Zentrofugalkraft erklären. Hier spielt auch noch die Abplattung der Erde eine Rolle. Da man an den Polen näher am Erdmittelpunkt ist, wirkt dort auch eine größere Gravitationskraft.

Aufgabe 8: Gegeben: $F_Z = F, m, r.$ Gesucht: $v, \omega, T.$

$F_Z = m\frac{v^2}{r} \Leftrightarrow v = \sqrt{\frac{F_Z \cdot r}{m}} = \sqrt{\frac{0{,}15\text{ N} \cdot 15\text{ m}}{0{,}001\text{ kg}}} = 47{,}4\frac{\text{m}}{\text{s}}$. $\omega = \frac{v}{r} = 3{,}16\text{ s}^{-1}$. $f = \frac{\omega}{2\pi} = 0{,}50\text{ s}^{-1}$.

Aufgabe 9: $a_Z = 9g \Leftrightarrow \frac{v^2}{r} = 9g \Leftrightarrow r = \frac{v^2}{9g} = \frac{(1000\,\text{m/s})^2}{90\,\text{m/s}^2} = 11{,}1\,\text{km}.$
Der Radius darf also nicht enger als 11 Kilometer sein.

.

Aufgabe 10:* Da die Zentripetalkraft durch die Reibung aufgebracht wird (bzw. im Bezugssystem des Fahrers die Zentrifugalkraft nicht größer als die Reibung sein darf), muss $F_Z \leq F_R \Leftrightarrow m\frac{v^2}{r} \leq \mu mg \Leftrightarrow v \leq \sqrt{\mu \cdot g \cdot r}$ gelten. Durch Einsetzen der Werte berechnet man, dass die Geschwindigkeit daher auf trockener Straße höchstens 90 km/h, auf nasser höchstens 55 km/h betragen darf.

Aufgabe 11:* Das Auto hebt nicht ab, solange die Gewichtskraft mindestens so groß wie die notwendige Zentripetalkraft ist. Die Gleichung für den Grenzfall ist:
$F_G = F_Z \Leftrightarrow m\frac{v^2}{r} = mg \Leftrightarrow r = \frac{v^2}{g} = \frac{(27{,}78\,\text{m/s})^2}{9{,}81\,\text{m/s}^2} = 78{,}7\,\text{m}.$ Wenn der Krümmungsradius der Brücke größer als 79 Meter ist, wird das Auto nicht abheben.

Aufgabe 12: a) Da die in A vorhandene potentielle Energie in C komplett in kinetische Energie umgewandelt ist, gilt: $mgh = \frac{1}{2}mv_C^2 \Leftrightarrow v_C = \sqrt{2gh} = 17{,}3\,\text{m/s} = 62{,}4\,\text{km/h}.$

b) Hier beträgt der Höhenunterschied nur $h - 2r = 5$ m, also $v_B = \sqrt{2g(h-2r)} = 10\,\text{m/s}.$

c) oben: $F_Z = m\frac{v_B^2}{r} = 3000\,\text{N}.$ unten: $F_Z = m\frac{v_C^2}{r} = 9000\,\text{N}.$

d) Dies ist doppelt so viel wie die Gewichtskraft von 1500 N, so dass die Zentrifugalkraft überwiegt und den Wagen gegen die Schiene drückt, so dass er nicht herunter fällt. (Im ruhenden Bezugssystem ist die Erklärung schwieriger: Ohne Schiene würde der Wagen der Parabelbahn des waagrechten Wurfes folgen. Die Schiene verhindert dies und übt somit eine Kraft auf den Wagen aus. Diese und die Gewichtskraft des Wagens bilden gemeinsam die Zentripetalkraft.)

e) Auf die Schiene wirken sowohl die (Gegenkraft der) Zentripetalkraft als auch die Gewichtskraft des Wagens, beide in dieselbe Richtung, nämlich nach unten. Daher gilt

$$F = F_Z + F_G = m\frac{v_C^2}{r} + mg = 150kg \cdot \left(\frac{300}{5} + 10\right)\frac{m}{s^2} = 10500\,N\,.$$

g) Damit die Zentrifugalkraft überwiegt, muss $F_Z \geq F_G \Leftrightarrow m\frac{v_B^2}{r} \geq mg \Leftrightarrow v_B^2 \geq gr$ gelten.

Einsetzen der Formel aus Aufgabenteil b) führt auf $2g(h-2r) \geq gr \Leftrightarrow 2gh \geq 5gr \Leftrightarrow h \geq \frac{5}{2}r\,.$
Die Starthöhe muss also mindestens zweieinhalb Mal so groß sein wie der Radius der Kreisbahn (unter der Berücksichtigung der Reibung natürlich noch mehr).

f) Einsetzen in die Herleitung bei g) führt auf $h_{min} = 12{,}5$ m.

Aufgabe 13: a) Damit die Milch nicht ausläuft, muss die Zentrifugalkraft mindestens so groß wie die Gewichtskraft sein. Die Bedingung $F_Z = F_G$ führt auf:

$$m\frac{v^2}{r} = mg \quad \Leftrightarrow \quad v = \sqrt{rg} = \sqrt{10}\,\frac{m}{s} = 3{,}16 \text{ m/s}.$$

b) Das entspricht der Drehfrequenz

$$f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{v}{2\pi r} = 0{,}50\,\text{Hz}.$$

Aufgabe 14: b) Der Bahnradius der Sitze ist $r = r_0 + l \cdot \sin\varphi = 10{,}1\,\text{m}$. Aus $\tan\varphi = \frac{v^2}{rg}$ folgt dann $v = \sqrt{r \cdot g \cdot \tan\varphi} = 11{,}9$ m/s.

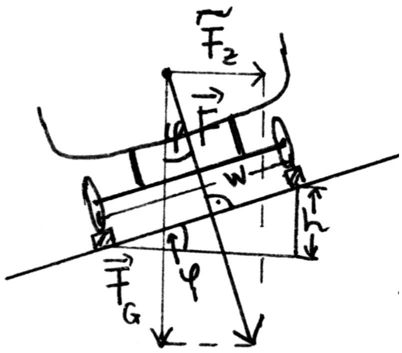
c) Das bedeutet eine Winkelgeschwindigkeit $\omega = \frac{v}{r} = 1{,}18\ \text{s}^{-1}$ und eine Umlaufzeit $T = 5{,}3$ s.

d) Aus dem Kräfteparallelogramm kann man ablesen, dass $\frac{G}{F} = \cos\varphi$ ist. Für die gesuchte Kraft gilt also $F = G / \cos\varphi = mg / \cos\varphi = 1454$ N.

Aufgabe 15: Analog zum ICE-Beispiel muss die Resultierende der Gewichtskraft und der Zentrifugalkraft senkrecht auf der Eisfläche stehen, was für den Neigungswinkel α wieder auf die Bedingung (Herleitung vergleiche Aufgabe 16) $\tan\alpha = \frac{v^2}{rg} = 3{,}08$ führt. Das entspricht einem Neigungswinkel von α = 72°.

Aufgabe 16: Die aus Zentrifugalkraft und Gewichtskraft resultierende Kraft muss senkrecht auf der schiefen Ebene stehen, da sie sonst seitlich wirkt und eine Seite stärker belastet wird. Daher taucht der Neigungswinkel auch im Kräfteparallelogramm wieder auf. Wie beim Karussell gilt

$$\tan\varphi = \frac{v^2}{rg} = \frac{(60\text{ m/s})^2}{2500\,\text{m}\cdot 9{,}81\frac{\text{m}}{\text{s}^2}} = 0{,}147$$ bzw. φ = 8,35°. Aus der Abbildung kann man ersehen, dass $\sin\varphi = \frac{h}{w}$ ist. Also müsste die äußere Schiene um $h = w \sin\varphi = 20{,}8$ cm überhöht sein.



Aufgabe 17: a) Die Personen werden durch die Zentrifugalkraft nach außen gedrückt. Dadurch drücken Sie mit einer ebenso großen Normalkraft senkrecht gegen die Innenwand der Trommel. Diese Auflagekraft verursacht eine Reibungskraft, die bei hinreichend großer Winkelgeschwindigkeit größer als die Gewichtskraft wird.

b) Die Reibungskraft $F_R = \mu \cdot F_z$ muss so groß wie die Gewichtskraft $F_G = mg$ sein.

$$F_R \ge F_G \quad \Leftrightarrow \quad \mu \cdot m \cdot \omega^2 \cdot r \ge m \cdot g \quad \Leftrightarrow \quad \omega \ge \sqrt{\frac{g}{\mu \cdot r}} = \sqrt{\frac{10\frac{m}{s^2}}{0{,}5 \cdot 4m}} = \sqrt{5}\,\frac{1}{s} \cong 2{,}24\,\frac{1}{s}.$$